Chapitre 5-Modèles numériques

5-1 Introduction

Il existe trois types de modèles numériques: aux équations filtrées, hydrostatique et aux équations primitives, ainsi que non-hydrostatique et aux équations primitives. Les modèles aux équations filtrées, qui sont les premiers modèles météorologiques des années 50 et 60, supposent un état de balance sur le plan horizontal et un état hydrostatique sur le plan vertical. Par ces hypothèses, ce type de modèle élimine les ondes de gravité pures et les ondes sonores, ce qui permet l'utilisation de pas de temps d'intégration relativement longs.

Les modèles hydrostatiques aux équations primitives les ont remplacés pendant les années 70. Ces modèles permettent l'existence des ondes de gravité pures mais éliminent les ondes sonores. Cependant, certaines méthodes numériques (comme l'intégration temporelle semi-implicite), qui ralentissent artificiellement les ondes les plus rapides, permettent l'utilisation d'un pas de temps d'intégration relativement long. Dernièrement, on a développé des méthodes numériques semblables qui ralentissent aussi les ondes sonores et éliminent donc la nécessité d'utiliser l'hypothèse hydrostatique. Cependant, comme nous allons le voir plus loin, tout type de simulation numérique des systèmes ayant une longueur d'onde plus grande que 500 km est similaire. Cependant, il semble que l'hypothèse de balance sur le plan horizontal n'est plus valide pour les systèmes de courte durée et ayant une longueur d'onde plus petite qu'environ 250 km. Quant à l'hypothèse hydrostatique, elle devient moins précise pour les phénomènes ayant une longueur d'onde plus petite qu'environ 50 km.

5.2 Modèles aux équations primitives

Les modèles aux équations primitives utilisent les équations (versions isobariques) suivantes:

Équation hypsométrique

$$\Phi_{p^*} = gZ = R\int_{p^*}^{p_s} \frac{T}{p}\,dp + \Phi_s \tag{5-1}$$

Équation de continuité

$$\omega_p = \int_{p_T}^{p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_p \right] dp \tag{5-2a}$$

Tendance de pression au sol

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \int_{p_T}^{p_s} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_p \right] dp \tag{5-2b}$$

Équations du mouvement

$$\frac{d\vec{V}_h}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_h}{\partial t} + u \left(\frac{\partial \vec{V}_h}{\partial x} \right)_p + v \left(\frac{\partial \vec{V}_h}{\partial y} \right)_p + \omega \left(\frac{\partial \vec{V}_h}{\partial p} \right) = - \vec{\nabla}_p \Phi - f\vec{k} x \vec{V}_h + \vec{r}_h \tag{5-3}$$

Équation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T + S\omega + \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} \tag{5-4}$$

(+ Équation de continuité pour l’eau incluant l'évaporation et précipitation)

Les variables du modèle sont la température (T), les composantes du vent horizontal u et v, le géopotentiel Φ_p, la pression au sol p_s, et la vitesse verticale ω. En ce qui a trait à l'équation de continuité pour l'eau, nous ajoutons la humidité et le contenu en eau liquide. Pendant l'intégration du modèle, il faut paramétriser les effets du sol (friction et orographie), le cycle d'eau y compris la microphysique des nuages et la précipitation, la turbulence et le convection (sèche et humide) sous-grille, les petites ondes de gravité, ainsi que les échanges avec la surface. Ces effets sont inclus dans dq/dt et $\vec{r}$. Ces modèles utilisent plusieurs types de coordonnées verticales (sigma, hybride, eta, isentropique, etc) ainsi que plusieurs méthodes numériques différentes pour calculer approximativement les dérivées (différences finies, éléments finis, spectrales, etc). Afin de pouvoir utiliser un pas de temps d’intégration plus long, on utilise aussi des méthodes numériques spéciales (semi-implicite, semi-Lagrangien, etc.).

Pour commencer l'intégration, il faut connaître les variables suivantes sur les points de grille du modèle: température, pression au sol, vent horizontal, et humidité. Étant donné qu'il existe des erreurs de mesures, on doit "initialiser" les données pour les rendre au début en état de balance pour les systèmes à grande échelle (> 300 km) pour éviter l'exitiation des ondes de gravité non-réaliste de grande amplitude. Les méthodes le plus utilisée présentement sont l'initialisation aux modes normaux (balance quasi-géostrophique) ou la méthode variationelle (l'état de balance fait partir des contraints).

Étapes de l'intégration

1) Calculer Φ_p à partir de la pression au sol et de la température en utilisant l'équation (1)
2) Calculer le mouvement vertical à partir du vent en utilisant l'équation (2a)
3) Calculer une nouvelle pression au sol en utilisant l'équation (2b)
4) Calculer un nouveau vent en utilisant l'équation (3)
5) Calculer une nouvelle température en utilisant l'équation (4)
6) Répéter les étapes 1-5

Note: Il faut paramétriser $\vec{r}$. (turbulence, ondes de gravité, etc) et dq/dt (dégagement de chaleur latente, sources de chaleur sensible, radiation, etc.).

5.3 Modèles balancés (i.e. quasi-géostrophiques)

Les premiers modèles météorologiques étaient quasi-géostrophiques. L'avantage d'un tel modèle est l'élimination des ondes de gravité pures. Cependant, le modèle ne s'applique pas aux systèmes non-balancés tels que les petits systèmes (L<300 km) et les systèmes à l'équateur. Les équations du modèle sont:

Équations (en coordonnées isobariques)

Définition du vent d'équilibre (géostrophique si $\vec{r} = 0$)

$$\vec{V}_e = -\frac{1}{f_o}\left(\vec{\nabla}_p \Phi \times \vec{k}\right) + \frac{1}{f_o}\left(\vec{r} \times \vec{k}\right) \tag{5.5}$$

Définition du tourbillon géostrophique

$$\nabla^2 \Phi = f_o\, \zeta_g \tag{5.6}$$

Équation d'oméga quasi-géostrophique

$$\nabla^2 \omega + \frac{p\, f_o^2}{R\, S}\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -\frac{1}{S}\nabla^2\left(-\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T\right) - \frac{1}{S}\frac{1}{c_p}\nabla^2 \frac{dq}{dt} + \frac{p\, f_o^2}{R\, S}\frac{\partial}{\partial p}\left[-\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla}\left(\zeta_g + f\right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{r} \cdot \vec{k}\right)\right]$$

(5.7)

Équation quasi-géostrophique du tourbillon

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}\left(\zeta_g + f\right) + f_o \frac{\partial \omega}{\partial p} \tag{5.8}$$

Équation hypsométrique

$$T = -\frac{p}{R}\frac{\partial \phi}{\partial p} \qquad (5.9)$$

(+ Équation de continuité pour l’eau incluant l'évaporation et précipitation)

Les variables du modèle sont:

Température
Pression au sol
(Humidité)

Étapes de l'intégration

1) Calculer Φ_p à partir de la pression au sol et de la température en utilisant l'équation (5.1)
2) Calculer le vent d'équilibre et le tourbillon géostrophique en utilisant les équations (5.5) et (5.6)
3) Calculer le mouvement vertical à partir de l'équation (5.7)
4) Calculer le nouveau tourbillon géostrophique à partir de l'équation (5.8)
5) Calculer le nouveau Φ_p à partir de l'équation (5.6)
6) Calculer le nouvelle température en utilisant l'équation (5.9)
7) Répéter les étapes 2-6

La version barotrope

Dans un atmosphère barotrope, la divergence est un ordre de grandeur plus petit et peut être négligée dans l'équation quasi-géostrophique du tourbillon (5.8) qui devient:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = - \vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}(\zeta_g + f) \qquad (5.9a)$$

qu'avec les équations 5.5 et 5.6 devient un modèle complète. Ce modèle ne requiert qu'initialement la géopotentiel et s'applique à un niveau. Normalement le niveau 500 hPa est utiliser étant proche en moyenne au niveau de non-divergence.

Étapes de l'intégration

1) Calculer Φ_p à partir de la pression au sol et de la température en utilisant l'équation (5.1)
2) Calculer le vent d'équilibre et le tourbillon géostrophique en utilisant les équations (5.5) et (5.6)
3) Calculer le nouveau tourbillon géostrophique à partir de l'équation (5.9a)
4) Calculer le nouveau Φ_p à partir de l'équation (5.6)
5) Répéter les étapes 2-5