

# CHAPITRE 3

## - ÉCOULEMENT EN ÉQUILIBRE

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre 1, on a constaté que les observations de l'écoulement sur le plan horizontal indiquent qu'il est en quasi-équilibre; c'est-à-dire que l'accélération horizontale est un ordre de grandeur inférieure aux forces. Un tel quasi-équilibre dans l'atmosphère libre impliquerait que les forces de Coriolis et de pression soient presque égales en grandeur mais de direction essentiellement opposée, comme décrit dans la figure 3.1a. Étant donné que la force de Coriolis est déterminée par le vent  $[\vec{c}_h = f \vec{V}_h]$  et se dirige à  $90^\circ$  à droite de  $\vec{V}_h$  l'équilibre exigera un rapport spécifique entre le vent et la force de pression.

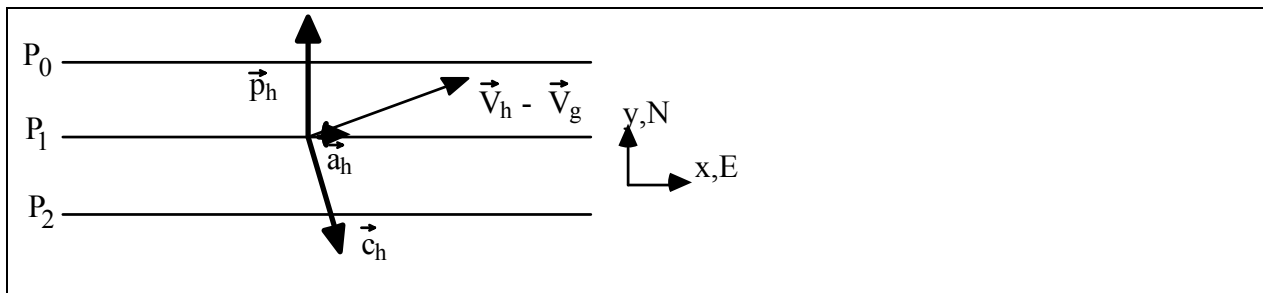
Le vent produisant un équilibre exact entre les deux forces est appelé "**vent géostrophique**" et est donné par l'équation (3.1):

$$\vec{V}_g = -\frac{1}{f} \vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k}$$
$$(3.1) \quad u_g = -\frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p$$
$$v_g = \frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p$$

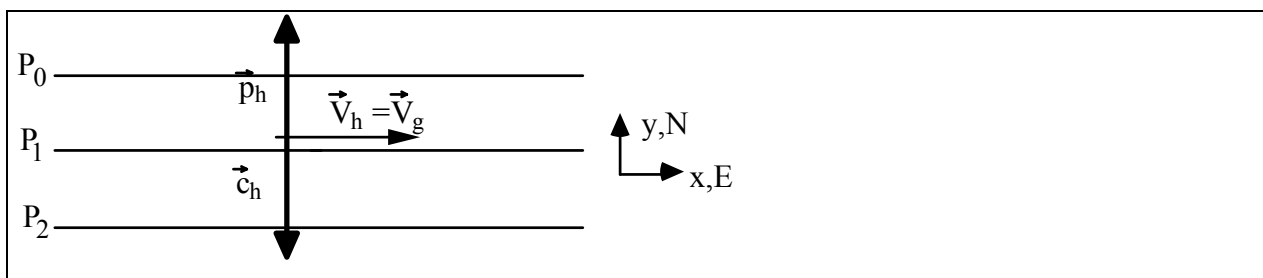
Avant d'étudier les caractéristiques de ce vent, on devrait se demander pourquoi l'écoulement horizontal est presque en équilibre, et pourquoi cet équilibre n'est pas plus exact.

La réponse à la deuxième question découle des observations qui montrent que la force horizontale de pression varie continuellement en fonction du temps et de l'espace. Si une particule d'air se trouve à un moment donné en équilibre exact (qui veut dire sa vitesse est géostrophique), l'équilibre sera dérangé un peu plus tard parce que la particule se déplacera et se trouvera avec une force de pression changée. Cependant, la vitesse (qui détermine la force de Coriolis) ne peut pas changer pour s'ajuster immédiatement parce que l'état d'équilibre précédent ne permettait aucun changement de vitesse.

Étant donné l'impossibilité d'un équilibre exact sur le plan horizontal, on se pose la question de savoir pourquoi l'équilibre est si bon. La réponse à cette question se trouve dans une étude de la réaction des particules d'air aux changements de la force de pression. Pour simplifier la discussion on ne considère pas les variations locales temporelles de la force de pression en supposant que le champ des isohypses (gradient de pression) est stationnaire.



**FIGURE 3.1a:** Somme de deux forces ( $\vec{p}_h + \vec{c}_h$ ) ayant *presque* la même grandeur mais de directions opposées.

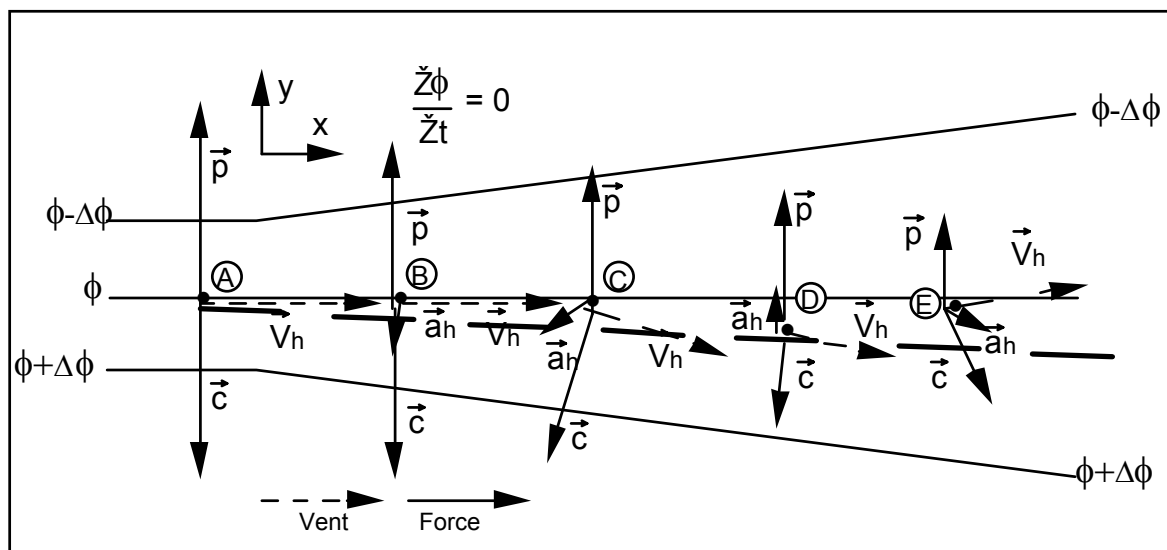


**FIGURE 3.1b:** Somme de deux forces ( $\vec{p}_h + \vec{c}_h$ ) ayant la même grandeur mais de directions opposées.

Considérons la particule d'air au point A dans la figure 3.2. Elle se déplace dans la direction des x positifs, dans la direction vers laquelle le module de la force de pression diminue parce que le gradient des isohypses est plus faible. Après quelques temps la particule A se trouve au point B

avec la même vitesse parce qu'il n'y avait pas d'accélération entre A et B. Elle se trouve ,donc, avec la même force de Coriolis tandis que la force horizontale de pression y est plus faible parce que le gradient horizontal de géopotentiel est moins grand. L'accélération créée par ces deux forces est petite par rapport aux forces et se dirige vers y négatif. Cette accélération agit à tourner la direction de la vitesse vers les y négatif sans changer son module.

Donc lorsque la particule se trouve au point C, sa vitesse a une faible composante vers les y négatifs. Parce que la force de Coriolis agit toujours à droite de la vitesse, elle est maintenant tournée un peu vers les x négatifs.  $\vec{p}_h$ , toujours vers les y positifs, a encore diminué. La somme des forces ( $\vec{a}_h$ ), toujours petite par rapport aux forces, agit maintenant à tourner et à ralentir la vitesse. À cause de cette nouvelle accélération le module de la vitesse au point D est moins grand. La direction est aussi plus tournée vers des x négatifs qu'au point précédent. Donc, la force de Coriolis, elle aussi est moins grande et plus tournée. La force horizontale de pression, toujours un peu moins grande, en combinaison avec la nouvelle force de Coriolis produit l'accélération indiquée, toujours petite par rapport aux forces. Cette accélération cette fois-ci agit surtout à ralentir la particule qui aura l'effet de diminuer la force de Coriolis de sorte qu'elle serait plus comparable à la force de pression ainsi gardant l'accélération petite.



**Figure 3.2:** Évolution de la vitesse et de l'accélération d'une particule dans un champ de géopotentiel qui varie dans l'espace.

Cette explication est aussi une simplification du comportement d'une particule d'air dans ces circonstances et représente les résultats en moyenne. Cependant, on voit que l'accélération créée par la variation de la force de pression agit avec un certain retard sur le vent avec le résultat que la force de Coriolis varie de façon semblable à la variation de la force de pression.

## 3.2 Vent géostrophique

Lorsqu'on résout l'équation (2.16)

$$\frac{d\vec{V}_h}{dt} = -\vec{\nabla}_p \Phi - f\vec{k} \times \vec{V}_h + (\mathbf{r}_h)^*$$

$$(2.16) \quad x: \frac{du}{dt} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p + fv + (\mathbf{r}_x)^*$$

$$y: \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_p - fu + (\mathbf{r}_y)^*$$

pour le vent horizontal (sans frottement) on trouve

$$(3.2) \quad \vec{V}_h = \overbrace{-\frac{1}{f} \vec{\nabla}_p \Phi}_{\vec{V}_g} \times \hat{k} - \overbrace{\frac{1}{f} \frac{d\vec{V}_h}{dt}}_{\vec{V}_{ag}} \times \hat{k}$$

Dimensions  
caractéristiques  $10^1 \quad 10^1 \quad 10^0$   
(m s<sup>-1</sup>)

ou

$$\vec{V}_h = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$

$$(a) \quad u = u_g + u_{ag} = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_p - \frac{1}{f} \frac{dv}{dt}$$

$$(b) \quad v = v_g + v_{ag} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p + \frac{1}{f} \frac{du}{dt}$$

qui indique que le vent peut être divisé en deux composantes : d'abord le vent géostrophique (défini dans l'équation (3.1)) qui est du même ordre de grandeur que le vent horizontal; ensuite

le vent agéostrophique, la déviation de l'état d'équilibre exact, qui est d'un ordre de grandeur inférieur au vent horizontal.

On remarque que le rapport du module du vent agéostrophique par rapport au module du vent horizontal

$$\frac{|\vec{V}_{ag}|}{|\vec{V}_h|} = \frac{1}{f} \frac{|d\vec{V}_h/dt|}{|\vec{V}_h|} = \frac{1}{f} \frac{|a_h|}{|\vec{V}_h|} = Ro$$

correspond au nombre de Rossby (Ro) tel que défini par l'équation (1.27). L'étude que l'on en a fait dans le chapitre précédent nous montre que ce rapport est de l'ordre de 0.1, soit le nombre de Rossby applicable à l'échelle synoptique.

Cette simple méthode approximative, le vent géostrophique, permet de calculer le vent horizontal à partir du gradient horizontal de géopotential. Le calcul du géopotential d'une surface isobare n'exige qu'un relevé de la température en fonction de la pression (avec la pression au sol et la hauteur du sol par rapport au niveau de la mer), obtenu d'un sondage aérologique. Donc, le réseau de stations aérologiques nous permet de connaître approximativement le vent horizontal indépendamment des observations directes du vent, de sorte que l'on peut disposer de deux mesures indépendantes.

Avant de vérifier à quel point le vent géostrophique est utile au calcul des paramètres de l'écoulement horizontal, il faut remarquer que l'existence de ce quasi-équilibre présente un **problème important dans le calcul de l'accélération horizontale à partir des observations des forces**. Ce problème se pose parce que **les mesures des forces horizontales comprennent des erreurs de l'ordre de 10%**, ou de la même grandeur que l'accélération. Donc, on ne peut pas directement calculer l'accélération. Ultérieurement, dans le chapitre 4, on traitera de certaines théories capables de calculer le vent agéostrophique mais on étudiera d'abord toutes les applications du vent géostrophique.

## Tourbillon horizontal

La composante verticale du tourbillon du vent  $\left[ (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{k} \right]$  mesuré sur une surface isobare

$$(3.3) \quad \zeta_p = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_p - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p$$

est un paramètre souvent utilisé en météorologie. Elle représente (deux fois) la rotation du fluide autour d'un axe vertical local. Calculons d'abord le tourbillon du vent géostrophique et vérifions ensuite à quel point il constitue une bonne approximation du tourbillon du vent horizontal. D'abord on décompose le vent horizontal selon les composantes géostrophique et agéostrophique :

$$\vec{V}_h = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$

$$(3.2) \quad x: u = u_g + u_{ag}$$

$$y: v = v_g + v_{ag}$$

Le tourbillon sur une surface isobare est:

$$\underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_p - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p}_{\zeta_p} = \underbrace{\left( \frac{\partial v_g}{\partial x} \right)_p - \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_p}_{\zeta_g} + \underbrace{\left( \frac{\partial v_{ag}}{\partial x} \right)_p - \left( \frac{\partial u_{ag}}{\partial y} \right)_p}_{\zeta_{ag}}$$

Le calcul mathématique du tourbillon du vent géostrophique se fait à partir de l'équation (3.1)

$$(3.1) \quad a) \quad u_g = -\frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p$$

$$\text{b) } v_g = \frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p$$

$$(3.3a) \quad \text{Donc, } \frac{\partial v_g}{\partial x} = \frac{1}{f} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_p$$

(Notons que  $f$  n'est pas une fonction de  $x$  mais seulement de  $y$ )

$$(3.3b) \quad \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{1}{f} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_p \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p$$

et le tourbillon géostrophique est

$$(3.4) \quad \zeta_g = \left( \frac{\partial v_g}{\partial x} \right)_p - \left( \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)_p = \frac{1}{f} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_p + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_p \right] - \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \frac{\partial f}{\partial y}$$

Avec les définitions

$$\text{a) } u_g = -\frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p$$

$$(3.5) \quad \text{b) } \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \beta$$

et

$$\text{c) } \nabla_p^2 \Phi = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_p + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_p$$

le tourbillon géostrophique devient:

$$(3.6) \quad \zeta_g = \frac{1}{f} \nabla_p^2 \Phi + \frac{u_g \beta}{f}$$



En utilisant les relations suivantes:

$$(3.7) \quad \frac{\beta}{f} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega_T \cos \varphi}{2\Omega_T \sin \varphi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_p$$

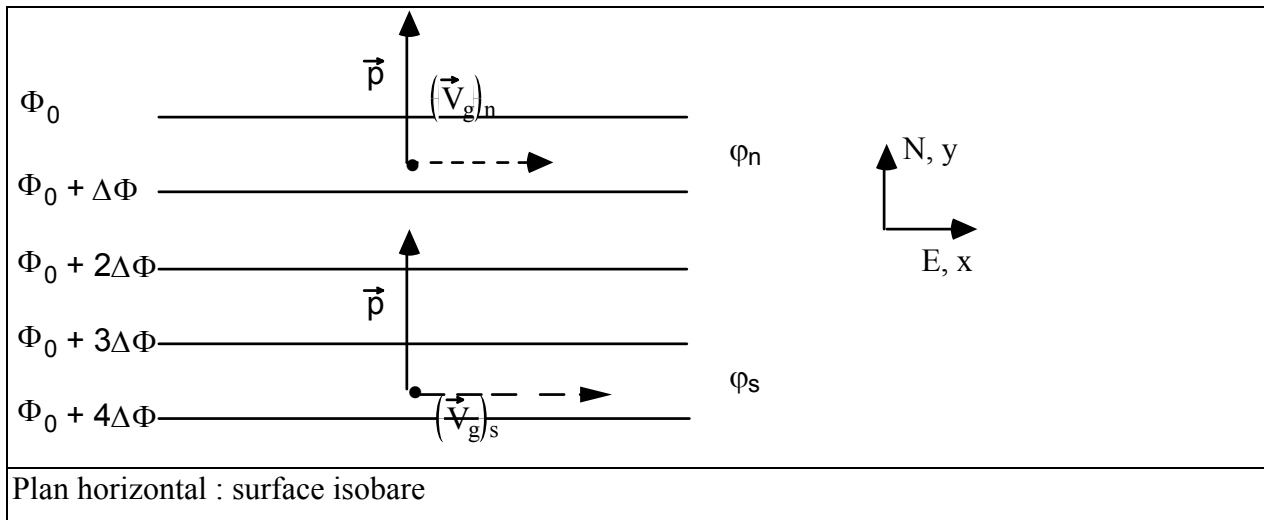
et

$$(3.8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r_T}$$

Le tourbillon géostrophique est aussi:

$$(3.9) \quad \zeta_g = \frac{1}{f} \nabla_p^2 \Phi + \frac{u_g \cot \varphi}{r_T}$$

Le tourbillon géostrophique dépend donc de la variation spatiale (deuxième dérivée) du géopotiel ( $\Phi = gZ$ ) plus un terme qui est dû au changement du paramètre de Coriolis avec la latitude. La raison physique du deuxième terme peut être dégagée facilement par l'examen de l'écoulement géostrophique décrit dans la figure 3.3. Là, les isohypses sont orientés dans le sens est-ouest et sont parallèles, tandis que le gradient de géopotiel est uniforme. Donc :  $\nabla^2 \Phi = 0$ .



**Figure 3.3:** Tourbillon géostrophique dû à l'orientation est-ouest des isohypses et à la variation nord-sud du paramètre de Coriolis.

En raison de l'uniformité de la force de gradient de pression, il faut que la force de Coriolis soit aussi uniforme pour qu'un équilibre géostrophique soit réalisé. Cependant, comme la latitude et donc l'effet de Coriolis augmente vers le nord, il est nécessaire pour produire la même force de Coriolis partout, que le vent géostrophique diminue vers le nord. Cela indique l'existence du cisaillement horizontal du vent et du tourbillon. Donc, lorsque les isohypses sont orientés dans le sens est-ouest, le cisaillement horizontal du vent géostrophique apporte sa contribution au tourbillon grâce à la variation du paramètre de Coriolis (taux local de rotation de la terre) avec la latitude.

On peut maintenant calculer les dimensions des termes à l'aide des dimensions caractéristiques du tableau 1.3.

$$(3.10) \quad \zeta_p = \overbrace{\frac{1}{f} \nabla_p^2 \Phi + \frac{u_g \cot \varphi}{r_T}}^{\zeta_g} + \overbrace{\left( \frac{\partial v_{ag}}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial u_{ag}}{\partial y} \right)_p}_{\zeta_{ag}}$$

Dimensions  
caractéristiques  $10^{-5}$   $10^{-5}$   $10^{-6}$   $10^{-6}$   
( $s^{-1}$ )

Le tourbillon de vent agéostrophique se calcule comme suit:

$$\vec{V}_{ag} = -\frac{1}{f} \frac{d\vec{V}_h}{dt} \times \hat{k}$$

$$(3.11) \quad u_{ag} = -\frac{1}{f} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{f} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} \right]$$

$$v_{ag} = \frac{1}{f} \frac{du}{dt} = \frac{1}{f} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} \right]$$

Les dérivées sont:

$$\frac{\partial u_{ag}}{\partial y} = \frac{\beta}{f^2} \frac{dv}{dt} - \frac{1}{f} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} \right]$$

(3.12)

$$\frac{\partial v_{ag}}{\partial x} = \frac{1}{f} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} \right]$$

Le tourbillon du vent agéostrophique devient:

$$\frac{\partial v_{ag}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ag}}{\partial y} =$$

(3.13)

$$\frac{1}{f} \left[ \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + \omega \frac{\partial D}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\beta}{f^2} \frac{dv}{dt}$$

$$- \frac{\beta}{f^2} \frac{dv}{dt}$$

où  $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}$

Notons que:  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$

et que:  $-\frac{\beta}{f^2} \frac{dv}{dt} = \frac{\beta u_{ag}}{f}$

On pourrait réécrire l'équation (3.13) comme suit:

$$\zeta_{ag} = \frac{\partial v_{ag}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ag}}{\partial y} =$$

(3.14)

$$\frac{1}{f} \left\{ \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + \omega \frac{\partial D}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} + D^2 - 2 \underbrace{\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right]}_{J(u,v)} + \beta u_{ag} \right\}$$

Combinant le tourbillon géostrophique donné par l'équation (3.6) et celui du vent agéostrophique donné par l'équation (3.14), on trouve le tourbillon du vent horizontal (cette équation est appelée **l'équation d'évolution de la divergence** ou l'équation de divergence):

(3.15)

$$\zeta_p = \zeta_g + \zeta_{ag} = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ag}}{\partial y} = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi + \frac{\beta u_g}{f} + \frac{\beta u_{ag}}{f} + \frac{1}{f} \frac{\partial D}{\partial t} +$$

Dimensions

caractéristiques  $10^{-5}$   $10^{-5}$   $10^{-5}$   $10^{-6}$   $10^{-6}$   $10^{-5}$   $10^{-6}$   $10^{-7}$   $10^{-7}$   
(s<sup>-1</sup>)

$$\frac{u}{f} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{v}{f} \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\omega}{f} \frac{\partial D}{\partial p} + \frac{1}{f} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} \right] + \frac{D^2}{f} - \frac{2}{f} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

$10^{-7}$   $10^{-7}$   $10^{-8}$   $10^{-7}$   $10^{-8}$   $10^{-6}$

Selon les grandeurs caractéristiques des termes, le tourbillon du vent se calcul à 10% près par:

(3.16)  $\zeta = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi + \varepsilon (10\%) \approx \zeta_g + \varepsilon (10\%)$

Dans cette forme l'équation est appelée **l'équation de balance (version géostrophique à 10% près)**. Par contre à 1% près (en gardant les termes de l'ordre de 10<sup>-6</sup> dans l'éq. (3.15)), le tourbillon devient:

(3.17) 
$$\zeta = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi + \frac{\beta u_g}{f} - \frac{2}{f} \overbrace{\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right]}^{J(u,v)} + \varepsilon(1\%)$$

Dimensions

caractéristiques  $10^{-5}$   $10^{-6}$   $10^{-6}$

(s<sup>-1</sup>)

L'équation (3.17) est maintenant appelée **l'équation de balance non-linéaire**. Remarquons qu'on pourrait remplacer u et v dans le dernier terme par u<sub>g</sub> et v<sub>g</sub> sans augmenter l'ordre de

grandeur de l'erreur. La définition de "**balance**" (à ne pas confondre avec équilibre) sera abordé dans le chapitre 4.

Étant donné la précision des observations standards de la géopotential et du vent, on peut calculer le tourbillon à 10% près soit par le champ de géopotential en utilisant l'équation (3.16), soit par le champ de vent en calculant les dérivées composantes du tourbillon.

Donc, le tourbillon géostrophique moins le terme dû à la variation du paramètre de Coriolis et celui dû au vent agéostrophique se rapproche du tourbillon horizontal avec une erreur de l'ordre de 10%, soit:

$$(3.18) \quad \zeta_p \approx \zeta_g \approx \frac{1}{f} \nabla_p^2 \Phi$$

Si on fait le calcul du tourbillon horizontal, on trouve que celui-ci représente physiquement deux fois le taux de rotation par rapport aux coordonnées locales des particules d'air autour d'un axe vertical local, tandis qu'on trouve que le paramètre de Coriolis est deux fois le taux de rotation de la surface de la terre autour d'un axe vertical local. La somme des deux donnerait donc le tourbillon par rapport à un système de coordonnées fixes, que l'on appelle "tourbillon absolu".

$$(3.19) \quad \zeta_a = \zeta_p + f \approx \zeta_g + f \approx \frac{1}{f} \nabla_p^2 \Phi + f$$

## Divergence sur les surfaces isobariques

Devant les dimensions caractéristiques des dérivées de la divergence horizontale, on s'attend à trouver que la divergence soit de l'ordre de  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p \approx \frac{U}{L} \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Cependant, les observations dans l'atmosphère libre indiquent que celle-ci est seulement de l'ordre de  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$ . Cela ne peut s'expliquer autrement que par le fait que les deux composantes de la divergence  $(\partial u/\partial x)_p$  et  $(\partial v/\partial y)_p$  sont de la même dimension mais de signe contraire. Par conséquent, le calcul de la divergence horizontale devra tenir compte d'un calcul plus précis du vent. Ceci révèle que le vent géostrophique ne serait probablement pas suffisamment précis puisqu'une erreur de 10% dans les dérivés horizontales de la divergence entraînera une erreur de 100% dans leur somme.

Pour le vérifier on utilise une méthode identique tant dans le calcul de la divergence du vent que dans le calcul du tourbillon.

$$(3.20) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g + \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag}$$

La divergence du vent géostrophique est

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g = \left(\frac{\partial u_g}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v_g}{\partial y}\right)_p = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p \right)$$

ou

$$(3.21) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g = \frac{1}{f} \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p \right]}_0 - \frac{1}{f^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p \frac{\partial f}{\partial y}$$

et donc

$$(3.22) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g = -\frac{v_g}{f} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_p = -\frac{v_g \cot \varphi}{r_T}$$

Donc, la seule contribution du vent géostrophique à la divergence est due à la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude ( $\partial f/\partial y$ ).

Cette contribution peut être mieux comprise si l'on considère une région où la force de pression exercée sur une surface isobare ( $\vec{p}_h$ ) est uniforme et se dirige vers les x négatifs (l'ouest) comme l'illustre la figure 3.4. L'équilibre géostrophique implique aussi que la force de Coriolis soit uniforme et dans la direction opposée. Parce que le paramètre de Coriolis augmente vers le nord en fonction de la latitude, le vent géostrophique doit augmenter vers le sud pour conserver la force de Coriolis constante. Ce résultat est décrit dans la figure 3.4 où la convergence y est clairement évidente.

À l'aide des dimensions caractéristiques du tableau 1.3 on peut maintenant calculer les dimensions caractéristiques des contributions à la divergence horizontale sur les surfaces isobares :

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = (\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g) + (\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag})$$

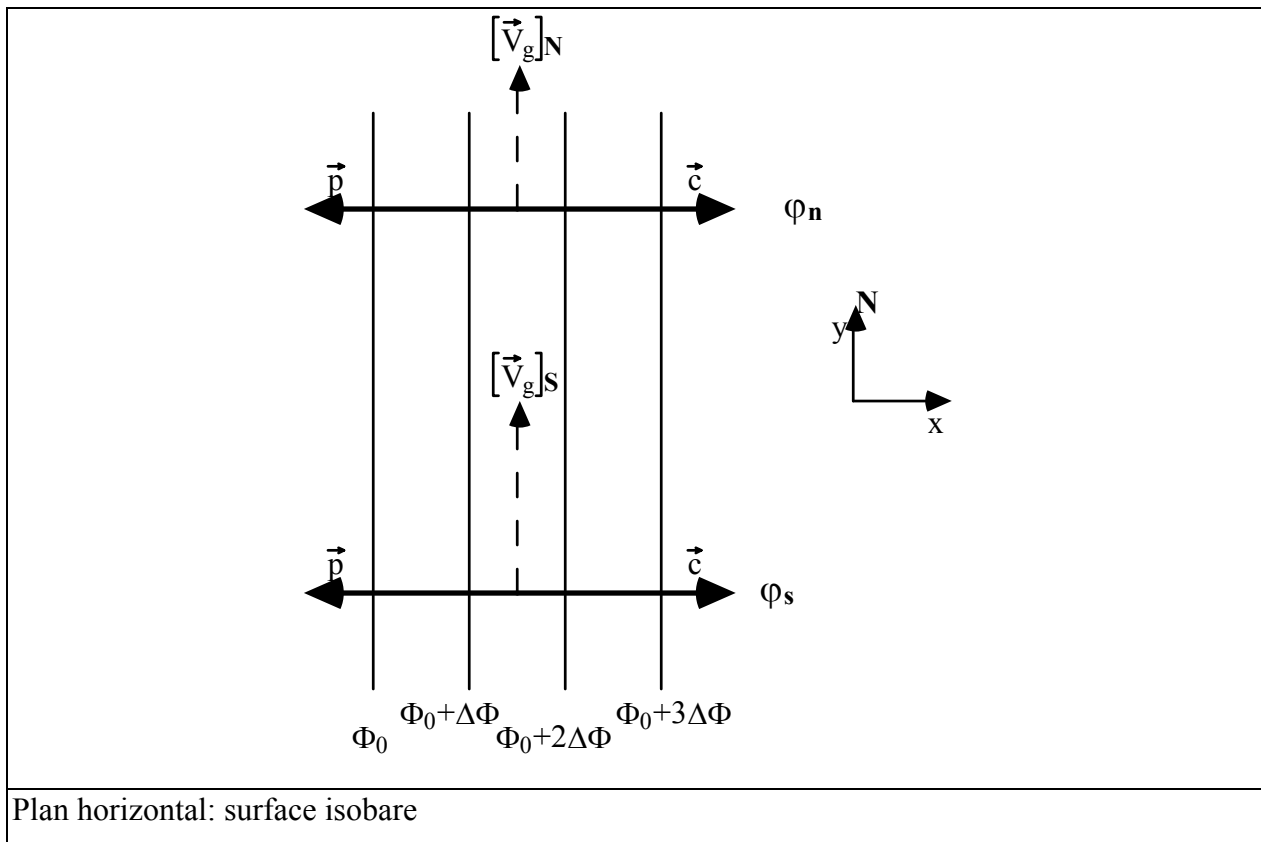
$$(3.23) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = -\frac{v_g}{f} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_p + \left[ \left( \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} \right)_p + \left( \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right)_p \right]$$

Dimensions			
caractéristiques	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
( $s^{-1}$ )			

$$\left( \text{Note: } \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \beta = \frac{2\Omega_T \cos \varphi}{r_T} \approx 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1} \right)$$

Étant donné que  $(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag})$  est aussi importante que  $(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g)$ , la divergence du vent géostrophique ne suffit donc pas pour faire le calcul de la divergence horizontale du vent et elle conduirait à

une erreur de l'ordre de 100%. Il faut donc procéder à une évaluation plus précise du vent horizontal qui aboutirait à une erreur de l'ordre de 1% seulement. On voit donc pourquoi la divergence est un ordre de grandeur plus petit que les dérivées. Le vent géostrophique, qui représente une partie importante du vent horizontal, est presque non-divergent.



**Figure 3.4:** La contribution du vent géostrophique à la divergence horizontale due à l'orientation nord-sud des isohypses et à la variation nord-sud du paramètre de Coriolis.

La divergence du vent agéostrophique est:



$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_{ag} &= \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{f} \frac{dv}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f} \frac{du}{dt} \right) \\
3.24 \quad &= -\frac{1}{f} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} \right] + \frac{\beta}{f} \frac{du}{dt} \right\} \\
&= -\frac{1}{f} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_D \zeta + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} + \beta v_{ag} \right]
\end{aligned}$$

Combinant l'équation (3.22) et (3.24), on peut isoler la divergence qui devient:

$$D = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_h = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_g + \vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_{ag} = \left( \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y} \right)$$

Dimensions

caractéristiques

(s<sup>-1</sup>)

$$\frac{10^{-5} \quad 10^{-5}}{10^{-6}} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6}$$

(3.25)

$$(3.25) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_h = -\frac{1}{(\zeta + f)} \left[ \beta v_g + \beta v_{ag} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right]$$

Dimensions

caractéristiques

(s<sup>-1</sup>)

$$10^{-6} \quad 10^{-7} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7}$$

Cette équation est appelé l'équation de l'évolution du tourbillon ou **l'équation de tourbillon**.

Étant donné que f (10<sup>-4</sup>) est typiquement un ordre de grandeur plus grand que ζ (10<sup>-5</sup>), la divergence se calcule à 10% près par (on peut utiliser ζ = ζ<sub>g</sub> et u = u<sub>g</sub> et v = v<sub>g</sub> sans augmenter l'ordre de grandeur de l'erreur).

$$(3.26) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}_h = -\frac{1}{f} \left[ \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \beta v_g \right] + \varepsilon (10\%)$$

Cette équation est appelé **l'équation de tourbillon quasi-géostrophique**. Une explication physique détaillée de cette équation se trouve dans le chapitre 4.

Donc, on voit que la seule divergence du vent géostrophique n'est pas suffisante pour calculer la divergence avec une erreur seulement de l'ordre de 10%. Ce fait est dû à la faiblesse de la divergence du vent géostrophique ( $10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ), qui selon les grandeurs caractéristiques de ces dérivées  $\partial u_g/\partial x$  et  $\partial v_g/\partial y$  aurait dû être de l'ordre de  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

Étant donné que l'erreur des observations du vent, est de l'ordre de 10% et que la divergence horizontale est de l'ordre seulement de 10% des dérivées composantes, il s'avère impossible de calculer, d'une façon systématique, la divergence horizontale à partir des observations du vent. Selon l'équation (3.26), il faudrait disposer d'une série d'observations du champ du vent ou du géopotential afin de calculer la divergence à 10%. La série est nécessaire afin d'évaluer la tendance locale du tourbillon  $\partial \zeta/\partial t$  ou du tourbillon géostrophique ( $\partial \zeta_g/\partial t$ ). Cependant, une autre stratégie sera présentée dans le chapitre 4 pour calculer ces tendances à partir des observations à un moment donné.

### **3.3 Variation sur le plan vertical du vent horizontal**

À cause du fait que le vent horizontal soit essentiellement géostrophique, la variation sur le plan vertical du vent horizontal peut être mieux comprise si l'on comprend la variation verticale du vent géostrophique. À une latitude donnée, le vent géostrophique est déterminé par la force horizontale de pression qui, dans une atmosphère en équilibre approximatif hydrostatique, est déterminée par la variation horizontale du géopotential des surfaces isobares, donc la pente des surfaces isobares en fonction du géopotential tel qu'indiqué dans la figure 3.5. Si la distance verticale entre les surfaces (l'épaisseur  $\Delta z$ ) variait horizontalement (voir encore la figure 3.5) la pente des surfaces isobariques changerait avec la hauteur.

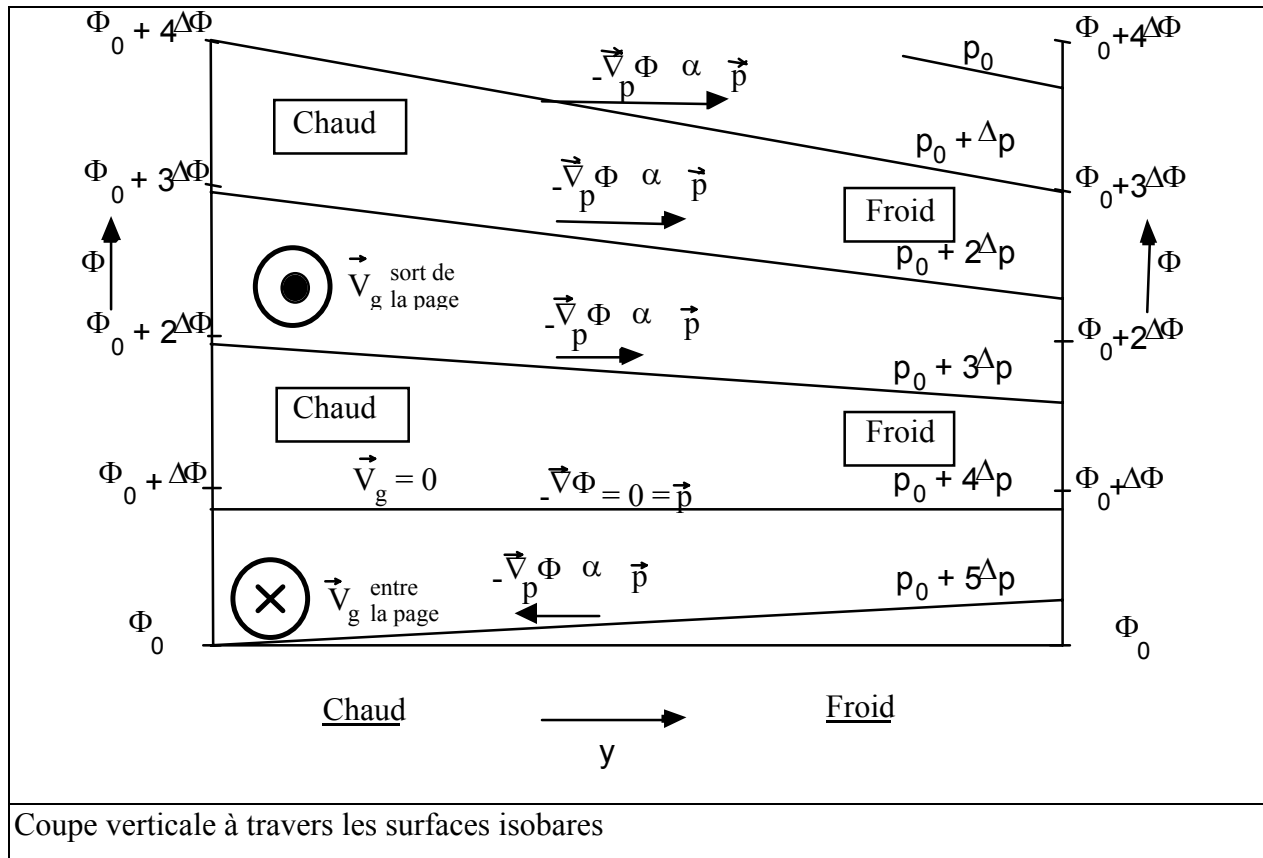


Figure 3.5: La variation verticale du vent géostrophique due au gradient horizontal de la température.

Dans la section 2.2 on a noté que l'épaisseur entre deux surfaces isobariques dans une atmosphère en équilibre hydrostatique ne dépend que de la température dans la couche entre les deux surfaces (l'équation hypsométrique):

$$(2.4) \quad \Delta Z = Z_{p_2} - Z_{p_1} = \frac{R}{g} \int_{p_2}^{p_1} \frac{T}{p} dp$$

La diminution de l'épaisseur vers les y positifs dans la figure 3.5 indique que l'air est plus froid dans cette direction comme indiquée dans la figure 3.5. On voit que les surfaces isobares, qui étaient penchées du nord au sud dans la basse atmosphère, deviennent penchées du sud au nord dans la haute atmosphère. Le vent géostrophique, qui entre dans la page dans la basse atmosphère, sort de la page dans la haute atmosphère. On peut donc conclure que **la variation**

**sur le plan vertical du vent géostrophique (et donc du vent horizontal) peut être attribuée à la variation horizontale de la température.**

Il est très important de noter ici que contrairement à ce qu'on pourrait déduire intuitivement, un gradient horizontal de température à l'échelle synoptique **ne produit pas** une circulation directe comme dans la figure 3.6. Dans cette figure on voit l'air chaud se lever et se déplacer vers les couches froides tandis que l'air froid descend et se déplace vers les couches plus chaudes. L'effet de la force de Coriolis due à la rotation de la terre **empêche** ce type de circulation de se développer. Cependant, aux échelles inférieures à l'échelle synoptique, où les distances sont trop faibles, il existe des circulations directes qui causent par exemple des brises de mer et de lac.

Le calcul de la variation verticale (avec la pression comme coordonnée verticale) du vent horizontal se fait à partir de l'équation (3.2).

$$(3.2) \quad \vec{V}_h = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$$

Selon les dimensions caractéristiques des variations verticales de chaque terme,

$$(3.27) \quad \begin{array}{l} \text{Dimensions} \\ \text{caractéristiques} \\ (\text{m s}^{-1} \text{Pa}^{-1}) \end{array} \quad \frac{\partial \vec{V}_h}{\partial p} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} + \frac{\partial \vec{V}_{ag}}{\partial p} \quad \begin{array}{ccc} 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-5} \end{array}$$

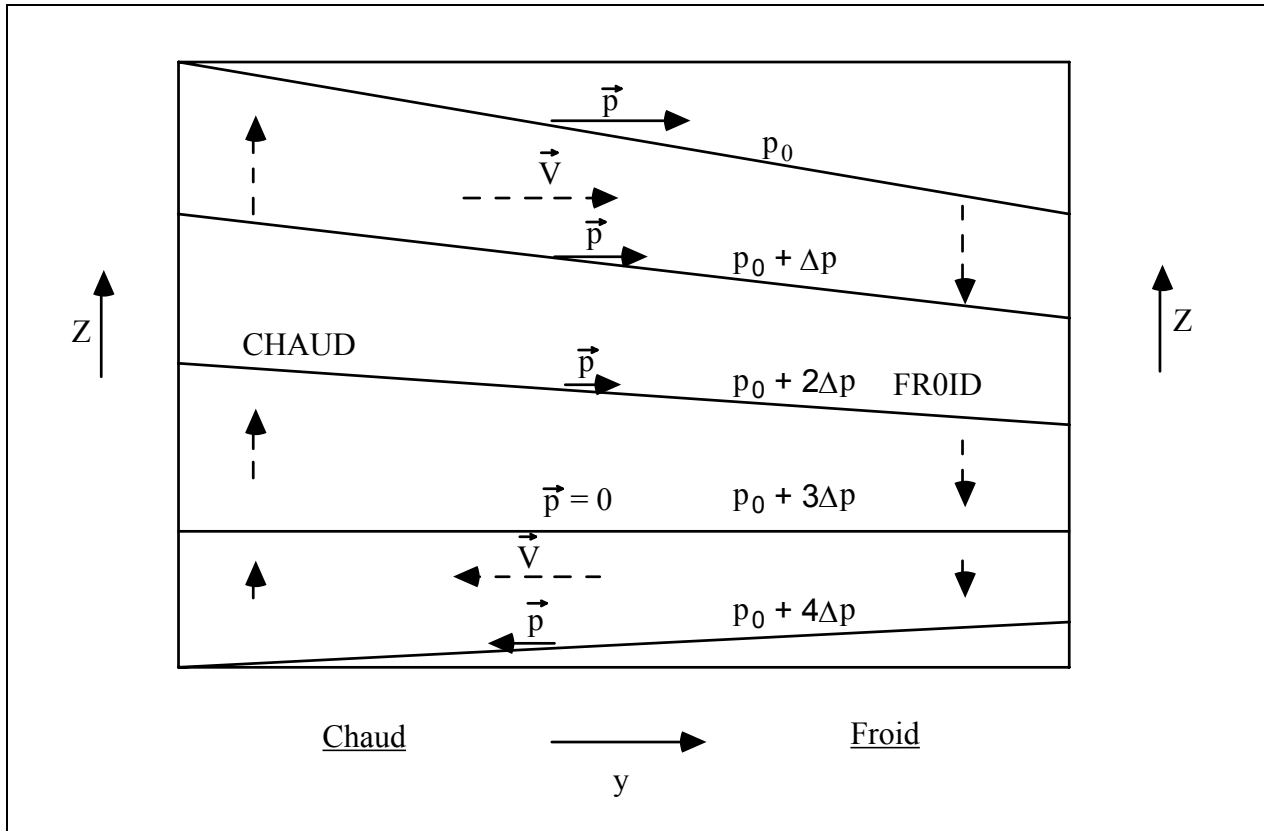


Figure 3.6: Exemple d'une circulation directe.

la variation verticale du vent géostrophique représente de l'ordre de 90% de la variation verticale du vent horizontal. Considérons le vent géostrophique par l'équation (3.1) :

$$(3.1) \quad \vec{V}_g = -\frac{1}{f} \vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k} = -\frac{g}{f} \vec{\nabla}_p Z \times \hat{k}$$

et compte tenu de la variation verticale (en fonction de p) on trouve que:

$$(3.28) \quad \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = -\frac{g}{f} \vec{\nabla}_p \left( \frac{\partial Z}{\partial p} \right) \times \hat{k}$$

Selon l'équation hydrostatique (l'équation (1.26)) et la loi des gaz parfaits (l'équation (1.12)) on avait trouvé :

$$(2.3) \quad \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{RT}{pg}$$

et donc,

$$(3.29) \quad \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = \frac{g}{f} \vec{\nabla}_p \left( \frac{RT}{pg} \right) \times \hat{k}$$

$$\text{où} \quad \vec{\nabla}_p \left( \frac{RT}{pg} \right) = \frac{R}{pg} \vec{\nabla}_p T$$

de sorte que

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial p} &\approx \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} = \frac{R}{fp} \vec{\nabla}_p T \times \hat{k} \\ \text{x: } \frac{\partial u_g}{\partial p} &= \frac{R}{fp} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_p \\ \text{y: } \frac{\partial v_g}{\partial p} &= - \frac{R}{fp} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p \end{aligned}$$

L'équation (3.30) peut aussi être inversée afin de calculer le gradient horizontal de la température (sur une surface isobare) par la variation verticale du vent géostrophique :

$$(3.31) \quad \vec{\nabla}_p T = - \frac{fp}{R} \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p} \times \hat{k}$$

En substituant la valeur du vent horizontal par celle du vent géostrophique on peut estimer le gradient horizontal de la température à 90% près à partir des observations de la variation verticale du vent horizontal. Les applications de ces résultats seront présentées dans le chapitre 4.

### 3.4 Le vent horizontal dans la couche limite

Dans la couche limite planétaire où le vent est influencé par le sol, on observe, à l'échelle synoptique, que l'accélération est aussi d'un ordre de grandeur plus petit que les forces de pression et de Coriolis. Ceci signifie que la force de frottement possède la même dimension que ces deux forces et qu'elle se dirige de telle façon que la somme des trois forces est petite par rapport aux forces elles-mêmes.

#### Paramétrisation du frottement

L'action physique du sol sur l'air enlève une quantité de mouvement à l'air. Donc, la force de frottement agit à ralentir l'écoulement et se dirige dans le sens contraire à la direction de la vitesse du vent et sa grandeur devrait être proportionnelle à sa vitesse. La perte d'une quantité de mouvement de l'air ne se produit pas qu'au niveau du sol. La perte au sol produit un gradient vertical de la quantité de mouvement horizontal. Lorsque l'écoulement de l'air est turbulent, ce gradient crée un flux turbulent de quantité de mouvement vers le sol et diminue donc la quantité de mouvement aux niveaux supérieurs. Donc, bien que la force de frottement agisse près du sol, elle a aussi un effet au-dessus, parce qu'un flux de la quantité du mouvement horizontal est créé par la turbulence.

Les observations indiquent qu'en moyenne la couche sur laquelle le frottement du sol a un impact sur l'écoulement, appelée **couche limite planétaire** se termine en moyen entre 500m et 1000m au-dessus le sol. La hauteur de cette couche dépend, en effet, de l'intensité de la turbulence qui dépend à son tour de la rugosité du sol, de la structure verticale de la température et du vent. La hauteur peut varier de presque rien à plusieurs kilomètres. Le traitement de ce problème dépasse le domaine propre de ce cours. Ici, on va supposer que la force de frottement agit dans la direction contraire au vent et qu'elle est proportionnelle à sa grandeur, soit:

$$(3.32) \quad \vec{\Gamma}_h = -C\vec{V}_h$$

où  $C$ , le coefficient de frottement, comprend tous les effets physiques décrits ci-dessus.

Parce que la force de frottement devient nulle au sommet de la couche limite, on supposera aussi que  $C$  est fonction du géopotentiel (ou pression). Une façon de mesurer  $C$  empiriquement sera décrit ultérieurement dans ce chapitre. La paramétrisation du frottement peut être faite plus précisément à l'aide de certaines théories plus élaborées de la couche limite. Cependant, la paramétrisation dont il est question ici n'offre pas trop d'erreurs et elle sert surtout à dégager l'effet de frottement (un phénomène de la micro-échelle) sur l'échelle synoptique.

On établit le vent horizontal approximatif dans la couche limite grâce à trois forces en quasi-équilibre. Deux des trois forces, les forces de Coriolis et de frottement, dépendent directement du vent horizontal tandis que la force de pression dépend du gradient des isohypses de la surface isobare. Avec la latitude ( $\varphi$ ) et une valeur de  $C$  donnée, un seul vent peut produire un état d'équilibre lequel traverse les isohypses dans le sens des basses géopotentiels. Un exemple est présenté dans la figure 3.7.

L'équation du mouvement horizontal pour la couche limite planétaire, (l'équation (1.10) à l'horizontale) est

$$\begin{aligned} \vec{a}_h &= \vec{p}_h + \vec{c}_h + \vec{r}_h \\ \frac{d\vec{V}}{dt} &= -\vec{\nabla}\Phi - f\vec{k}\times\vec{V} - C\vec{V}_h \end{aligned}$$

Dimensions

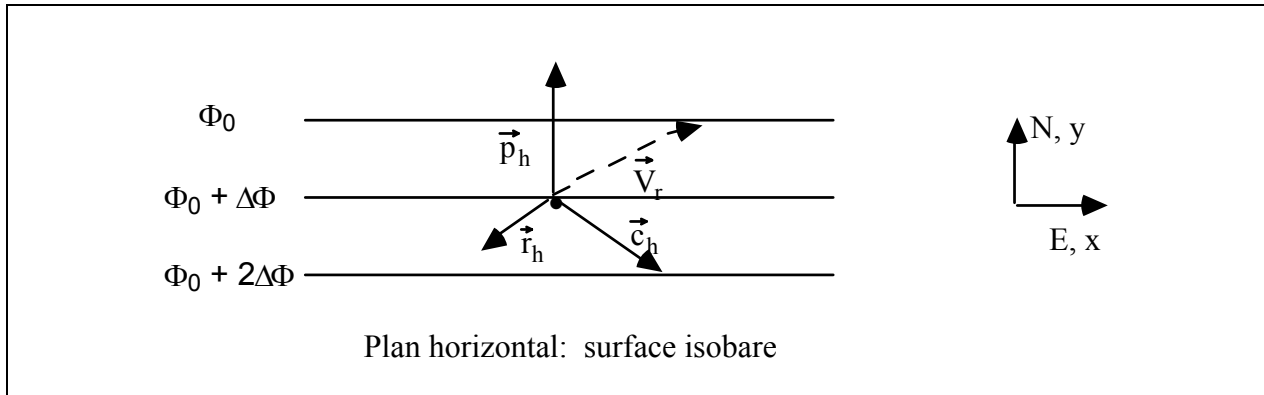
(3.33)	caractéristiques	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
	$m\ s^{-2}$				

où la force de frottement a été calculée par la méthode décrite ci-dessus. Si on refait l'équation pour  $\vec{V}_h$  et si on calcule les dimensions caractéristiques des termes d'après les valeurs du tableau 1.3, on trouve ceci:



$$(3.34) \quad \vec{V}_h = -\frac{f}{C^2 + f^2} \left[ \vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k} + \frac{C}{f} \vec{\nabla}_p \Phi + \frac{C}{f} \frac{d\vec{V}_h}{dt} + \frac{d\vec{V}_h}{dt} \times \hat{k} \right]$$

Dimensions  
caractéristiques  $10^1$                        $10^1$                        $10^1$                        $10^0$                        $10^0$   
( $m \ s^{-1}$ )



**Figure 3.7:** État d'équilibre horizontal dans la couche limite entre la force de pression ( $\vec{p}_h$ ), la force de Coriolis ( $\vec{c}_h$ ) et la force de frottement ( $\vec{r}_h$ ).

On voit encore que le vent horizontal peut être estimé avec une erreur de l'ordre de 10% seulement en négligeant l'accélération horizontale, soit:

$$\vec{V}_h \approx \vec{V}_r = -\frac{f}{C^2 + f^2} \left[ \underbrace{-f\vec{\nabla}_g}_{\vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k}} + \underbrace{\frac{C\vec{\nabla}_g \times \hat{k}}{f}}_{\frac{C}{f} \vec{\nabla}_p \Phi} \right]$$

ou

$$\vec{V}_h \approx \vec{V}_r = -\frac{f^2}{C^2 + f^2} \left[ \vec{V}_g - \frac{C}{f} (\vec{V}_g \times \hat{k}) \right]$$

$$(3.35) \quad \text{a) } x: u \approx u_r = -\frac{f}{C^2 + f^2} \left[ \overbrace{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p}^{-fu_g} + \frac{C}{f} \overbrace{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p}^{cv_g} \right]$$

$$\text{b) } y: v \approx v_r = \frac{f}{C^2 + f^2} \left[ \overbrace{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p}^{fv_g} - \frac{C}{f} \overbrace{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p}^{cu_g} \right]$$

Dans l'équation (3.35) on reconnaît certaines combinaisons de variables qui peuvent être exprimées en terme de vent géostrophique. Pour un gradient de géopotential orienté uniquement dans la direction des y positifs, tel que décrit dans la figure 3.8 où  $(\partial\Phi/\partial x)_p = 0$ , les équations pour les composantes  $u_r$  et  $v_r$  deviennent:

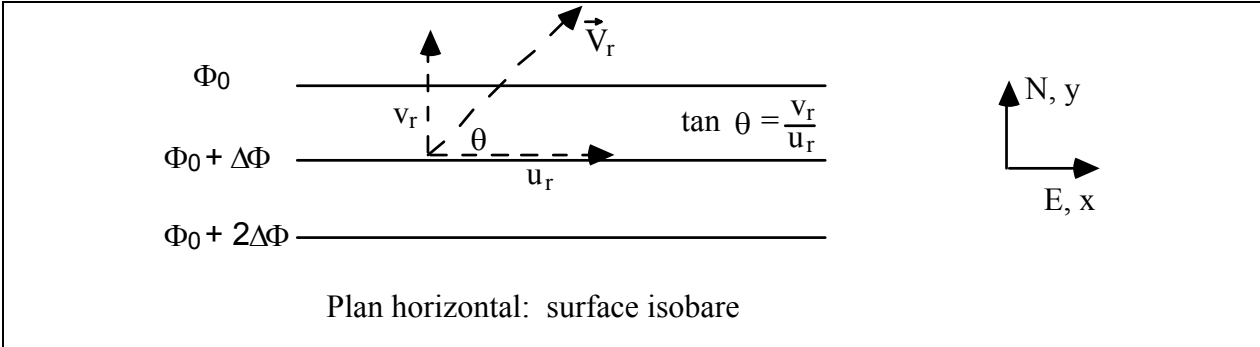
$$(3.36) \quad \begin{aligned} u_r &= -\frac{f}{C^2 + f^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \left[ \equiv \frac{f^2}{C^2 + f^2} u_g \right] \\ v_r &= -\frac{C}{C^2 + f^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p \left[ \equiv \frac{fC}{C^2 + f^2} u_g \right] \end{aligned}$$

Le rapport  $v_r/u_r$  donne la tangente de l'angle ( $\theta$ ) (voir figure 3.8) entre le vent et les isohypses, soit:

$$(3.37) \quad \tan \theta = \frac{v_r}{u_r} = \frac{C}{f}$$

Selon cette équation, pour une latitude donnée, le coefficient de frottement peut être calculé à partir des observations de la direction du vent par rapport à l'orientation des isohypses des surfaces isobares. Comme au sommet de la couche limite planétaire le vent horizontal est de nature quasi-géostrophique, il souffle par conséquent presque parallèlement aux isohypses. La hauteur de la couche limite se trouve donc là où le vent devient quasi-parallèle aux isohypses. La

variation verticale de C peut aussi être déterminée par le calcul de la variation de l'angle du vent par rapport aux isohypses.



**Figure 3.8:** Angle entre le vent d'équilibre dans la couche limite et les isohypses orientés est-ouest.

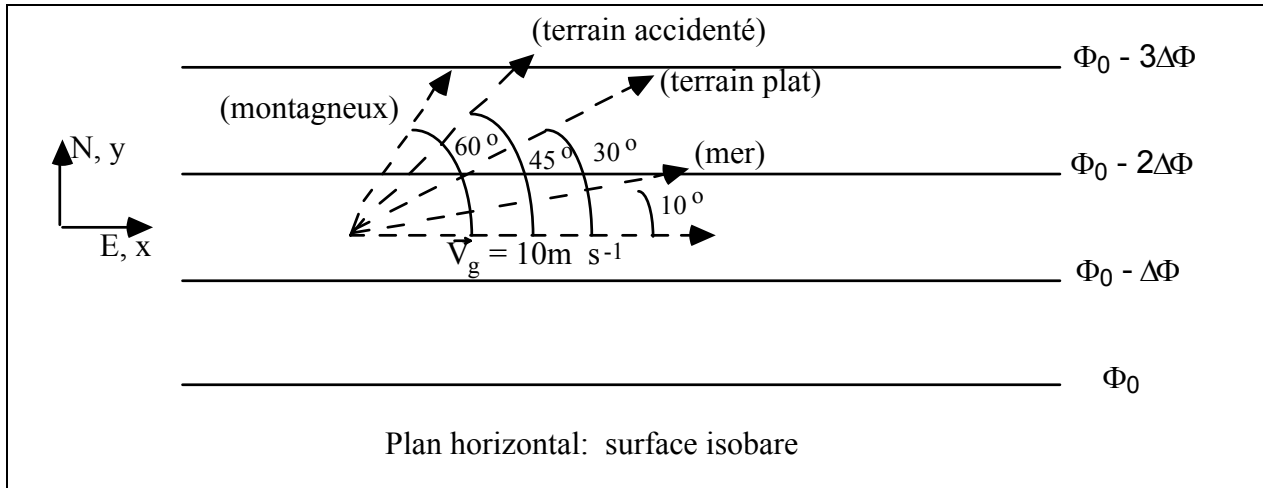
**TABLEAU 3.1**

Valeurs caractéristiques à 10m du coefficient de frottement pour des surfaces différentes et l'effet sur le vent horizontal (à 45° latitude)

TYPE DE SURFACE	COEFFICIENT C ( $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ )	ANGLE $\Theta$	$u_r$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	$v_r$ ( $\text{m s}^{-1}$ )	$\vec{V}_r$ ( $\text{m s}^{-1}$ )
Glissant	0	0	10.0	0	10.0
Eau (mer)	$\approx 0.2$	$\approx 10^\circ$	9.6	1.9	9.8
Terrain plat	$\approx 0.6$	$\approx 30^\circ$	7.5	4.3	8.6
Terrain accidenté	$\approx 1.0$	$\approx 45^\circ$	5.0	5.0	7.1
Montagneux	$\approx 1.7$	$\approx 60^\circ$	2.5	4.3	4.9

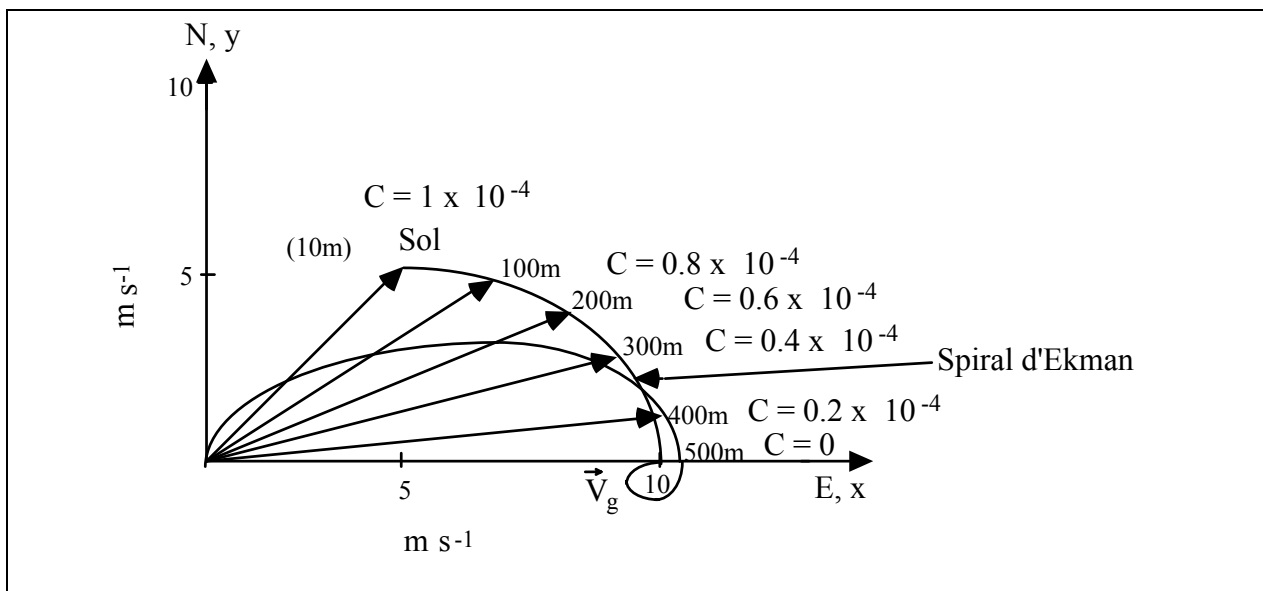
Les observations normales du vent de surface sont faites à 10 m. Combinée avec les analyses normales des isobares au niveau de la mer, la valeur de C à 10 m est disponible à partir des observations synoptiques. Les valeurs caractéristiques pour les différents types de surfaces de la Terre sont présentées dans le tableau 3.1 et accompagnées de l'effet que ces valeurs exercent sur un vent de base de  $10 \text{ m s}^{-1}$ .

Les mêmes résultats sont présentés sous forme graphique dans la figure 3.9. Au fur et à mesure que C augmente, le vent tourne de plus en plus vers le bas géopotentiel et diminue en grandeur. Comme dans la couche limite C diminue avec la hauteur, le vent, à mesure qu'on s'élève dans cette couche, tourne dans une direction horaire et augmente en grandeur.



**Figure 3.9:** Effets caractéristiques du frottement dus à des types de surface différents sur la direction et la vitesse du vent à environ 10 m.

Une telle variation verticale du vent horizontal dans la couche limite est présentée dans la figure 3.10 où on suppose que  $C$  diminue linéairement avec la hauteur et que le sommet de la couche limite est fixé à 500m. En plus on suppose que la force horizontale de pression ne varie pas dans la verticale et que le paramètre de Coriolis est  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Une paramétrisation plus complète de la force de frottement comme celle de la théorie d'Ekman, donne des résultats qualitativement très semblables (pour un atmosphère barotrope et neutre).



**Figure 3.10:** Variation verticale du vent horizontal dans la couche limite en supposant que  $C$  est une fonction linéaire de l'altitude.

## Tourbillon dans la couche limite

L'état de quasi-équilibre étant la condition essentielle du vent dans la couche limite, celui-ci est déterminé par la force de pression (gradient des isohypses) pour une latitude et un coefficient de frottement donné. Par analogie avec le tourbillon dans l'atmosphère libre, le tourbillon dans la couche limite devrait dépendre aussi de la variation horizontale du gradient des isohypses. Cependant, le vent en équilibre dans la couche limite est plus faible et se situe à gauche du vent géostrophique, la différence étant attribuée au coefficient de frottement. Si le coefficient de frottement est constant sur le plan horizontal, le tourbillon horizontal du vent en équilibre dans la couche limite, doit donc porter le même signe que le tourbillon du vent géostrophique et lui être inférieur.

Le calcul du tourbillon dans la couche limite se fait à partir de l'équation du vent horizontal :

$$(3.34) \quad \vec{V}_h = -\frac{f}{C^2 + f^2} \left[ \vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k} + \frac{C}{f} \vec{\nabla}_p \Phi + \frac{C}{f} \frac{d\vec{V}_h}{dt} + \frac{d\vec{V}_h}{dt} \times \hat{k} \right]$$

qui se décompose comme suit

$$x: u = -\frac{f}{C^2 + f^2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p + \frac{C}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p + \frac{C}{f} \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \right]$$

$$y: v = \frac{f}{C^2 + f^2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p - \frac{C}{f} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p - \frac{C}{f} \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \right]$$

En supposant que C et f soient constants ( $C_0$  et  $f_0$ ) sur le plan horizontal, le tourbillon cherché devient:

(3.38)

$$\zeta_p = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_p - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_p = \frac{f_0}{C_0^2 + f_0^2} \left\{ \nabla_p^2 \Phi - \frac{C_0}{f_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dv}{dt} \right)_p + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{du}{dt} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{dv}{dt} \right) \right\}$$

Dimension ( $s^{-1}$ )  
Caractéristique

$10^{-5}$

$10^{-6}$

$10^{-6}$

Si on n'avait pas supposé que  $C$  et  $f$  étaient uniformes sur le plan horizontal, on aurait généré d'autres termes généralement de dimensions  $10^{-6} s^{-1}$  ou plus petits. Selon les dimensions caractéristiques, on trouve que 90% du tourbillon horizontal dans la couche limite est donné par les premiers termes qui représentent le tourbillon du vent géostrophique multiplié par un facteur, qui dépend de  $C$  et  $f$ , et qui est inférieur à l'unité.

(3.39)

$$\zeta_p \approx \zeta_r = \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)_p - \left( \frac{\partial u_r}{\partial y} \right)_p = \frac{f_0}{C_0^2 + f_0^2} \left[ \nabla_p^2 \Phi \right] = \underbrace{\frac{f_0^2}{C_0^2 + f_0^2}}_{<1} \zeta_g$$

Lorsque  $C$  disparaît, le tourbillon du vent devient celui du vent géostrophique. Donc, le tourbillon du vent dans la couche limite est essentiellement le tourbillon du vent à l'équilibre dans cette couche. Ce tourbillon est toujours inférieur au tourbillon géostrophique par un facteur qui dépend de  $C$  et de  $f$ .

### **Divergence horizontale dans la couche limite**

À cause du fait que le vent horizontal dans la couche limite traverse les isohypses vers les bas géopotentiels, on peut déduire que le vent horizontal dans cette couche converge vers une dépression et diverge dans un anticyclone, comme indique la figure 3.11a. En plus, dans la figure 3.11b, on présente une autre distribution des isohypses et du vent qui produira de la convergence dans la couche limite. Dans ce deuxième cas, la convergence serait produite par la variation de la composante du vent dans la direction  $y$ . Cette variation est due au fait que la grandeur du

gradient de géopotentiel diminue dans la direction  $y$ . En comparant ces deux distributions spatiales d'isohypses dans la figure 3.11a et 3.11b, on remarque que la convergence peut se produire lorsque  $\nabla_p^2 \Phi > 0$  ce qui veut dire que le tourbillon du vent géostrophique est positif.

En ce qui concerne le calcul de la divergence dans la couche limite qui devrait nous donner des résultats semblables, on commence par l'équation du vent dans la couche limite (l'équation (3.34)) et on prend la divergence en supposant encore que  $C$  et  $f$  soient constants:

$$(3.40) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = -\frac{f_0}{C_0^2 + f_0^2} \left[ \vec{\nabla}_p \cdot (\vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k}) + \frac{C_0}{f_0} (\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_p \Phi) + \frac{C_0}{f_0} \left( \vec{\nabla}_p \cdot \frac{d\vec{V}_h}{dt} \right) + \vec{\nabla}_p \cdot \left( \frac{dV_h}{dt} \times \hat{k} \right) \right]$$

Les dimensions caractéristiques des termes résultants sont:

$$(3.41) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p =$$

$$-\frac{f_0}{C_0^2 + f_0^2} \left[ \frac{C_0}{f_0} (\nabla_p^2 \Phi) + \frac{C_0}{f_0} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{dv}{dt} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dv}{dt} \right) \right]$$

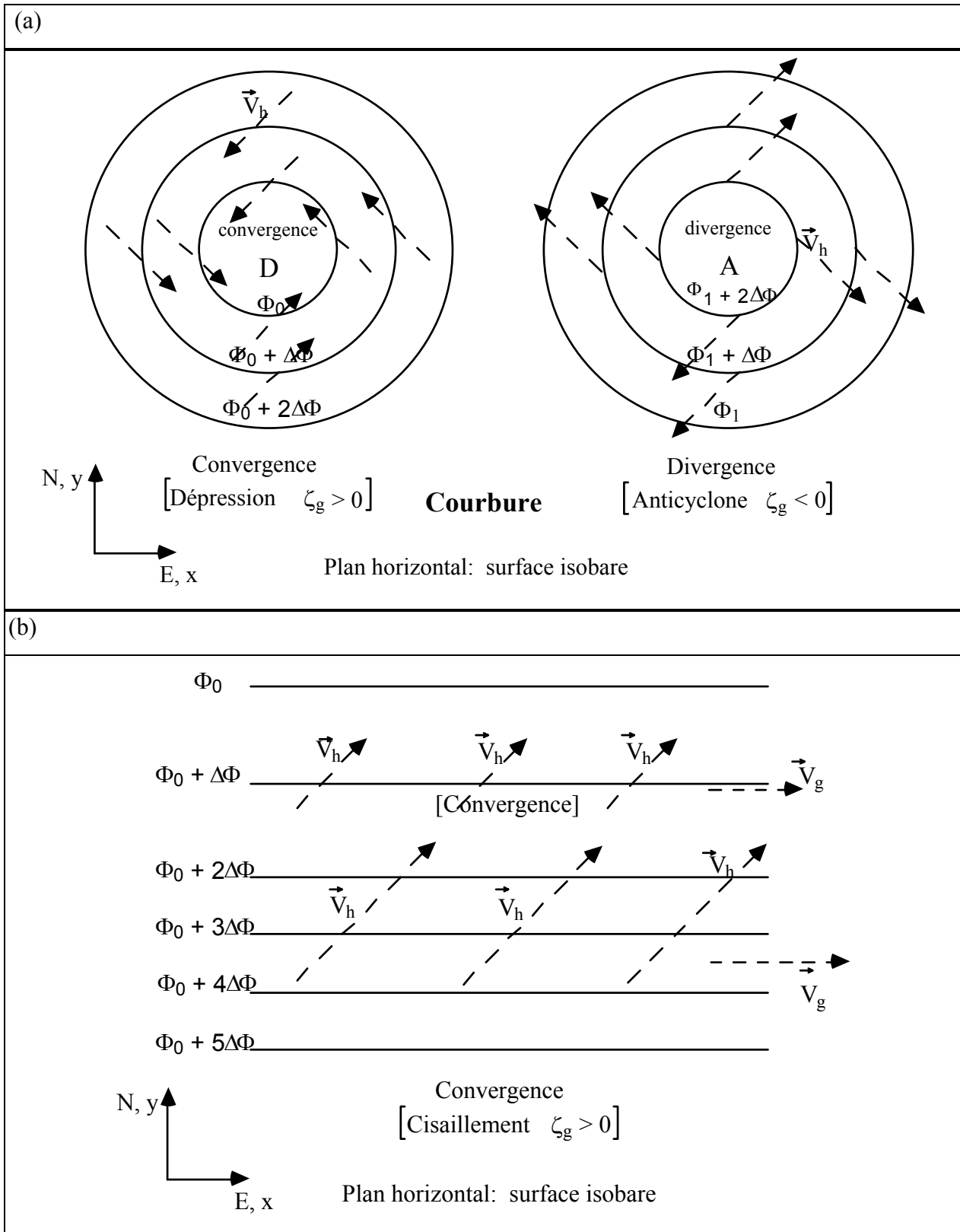
Dimensions  
caractéristiques  
( $s^{-1}$ )

$10^{-5}$

$10^{-6}$

$10^{-6}$





**Figure 3.11:** Distribution spatiale des isohypses qui produisent de la divergence dans la couche limite.

Si on avait tenu compte des variations horizontales de  $C$  et  $f$  on aurait produit encore des termes d'ordre inférieur à  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Donc 90% du calcul de la divergence dans la couche limite vient du premier terme qui représente la divergence du vent en état d'équilibre.

$$(3.42) \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h \approx \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_r = - \frac{C_0}{C_0^2 + f_0^2} \nabla_p^2 \Phi = - \frac{C_0 f_0}{C_0^2 + f_0^2} \zeta_g$$

Comme indiqué ci-dessus, le vent est convergent lorsque le tourbillon d'un vent géostrophique est positif et, pour un tourbillon géostrophique donné, la divergence est proportionnelle au coefficient de frottement et du paramètre de Coriolis. Il faut noter que **la divergence dans la couche limite planétaire est un ordre de grandeur supérieur à la divergence du vent dans l'atmosphère libre**. Donc, elle peut être calculée à partir des observations. En plus, la divergence dans la couche limite, contrairement à ce qui se passe dans l'atmosphère libre, peut être bien calculée approximativement par la divergence du vent en supposant l'état d'équilibre. Ce vent d'équilibre pour sa part, est déterminé par la force de pression, la force de Coriolis et le coefficient de frottement. Finalement on peut dire que la divergence dans la couche limite est bien déterminée par la distribution spatiale de la force de pression (gradient des isohypes).

### 3.5 Mouvement vertical au sommet de la couche limite

À ce point on est en mesure de comprendre le mouvement vertical au sommet de la couche limite. Appliquons l'équation (2.29) (répétée ci-dessous) qui indique que le mouvement vertical au sommet de cette couche dépend de l'effet "orographique" plus la divergence dans la couche limite (voir figure 3.12):

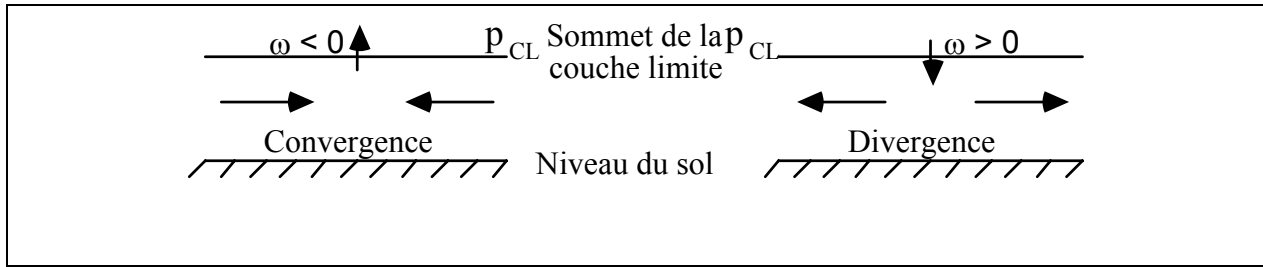


Figure 3.12: Le mouvement vertical au sommet de la couche déterminé par la divergence dans la couche limite.

$$2.29 \quad \omega_{CL} = \omega_0 + \int_{p_{CL}}^{p_0} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p \right] dp$$

$$10^{-1} \quad 10^{-1} \quad \underbrace{10^{-5} \quad 10^{-5} \quad 10^4}_{10^{-1}}$$

Or la divergence dans la couche limite dépend, selon les discussions précédentes (l'équation (3.42)), de la distribution des isohypses (c.-à-d. laplacien), du coefficient de frottement et de la latitude.

Substituons l'équation (3.42) dans (2.29), on trouve que:

$$(3.43) \quad \omega_{CL} = \omega_0 - \int_{p_{CL}}^{p_0} \left[ \frac{C_0}{f_0^2 + C_0^2} \nabla_p^2 \Phi \right] dp$$

Si on suppose que  $\nabla_p^2 \Phi$  ne varie pas beaucoup dans la couche limite et que  $C_0$  y varie linéairement, l'équation (3.43) devient:

$$(3.44) \quad \omega_{CL} = \omega_0 - \left( \frac{C_0}{C_0^2 + f_0^2} \right) \nabla_p^2 \Phi (p_0 - p_{CL})$$

Donc, en l'absence d'un effet important de l'orographie, on trouve généralement du mouvement ascendant au sommet de la couche limite où  $\nabla_p^2 \Phi$  (ou  $\nabla^2 p_{nm}$ )  $> 0$  c.-à-d. dans les dépressions, creux, etc... (voir figure 3.11b). Ce mouvement est induit par un déséquilibre des forces dans le plan vertical (impossible à mesurer) provoqué par la convergence isobarique. Cette convergence

est produite par le champ du vent essentiellement en équilibre entre 3 forces (pression, Coriolis et frottement).

Parce qu'on ne peut pas encore calculer, ni généralement bien mesurer la divergence au-dessus de la couche limite, on ne peut pas encore appliquer l'équation (2.28) afin de calculer dans l'atmosphère libre. Cependant, étant donné que la divergence dans l'atmosphère libre n'est typiquement que de l'ordre de  $10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , il faut généralement une couche atmosphérique assez épaisse ( $\approx 100 \text{ mb}$ ) avant que la divergence dans l'atmosphère libre modifie d'une façon significative le mouvement vertical généré par la couche limite. Donc, le mouvement vertical dans la très basse troposphère (1000-850mb) est produit surtout par les effets dans la couche limite, y compris les effets de l'orographie.