

## CHAPITRE IV - DIVERGENCE DANS L'ATMOSPHERE LIBRE

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 3, on a constaté que la divergence horizontale dans l'atmosphère est caractéristiquement un ordre de grandeur inférieur aux dimensions de ces composantes, i.e.

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p$$

dimensions             $10^{-6}$      $10^{-5}$      $10^{-5}$   
 caractéristiques  
 ( $s^{-1}$ )

Ce résultat est dû au fait que le vent est presque en équilibre géostrophique et que la divergence du vent géostrophique est petite par rapport aux grandeurs caractéristiques de ces composantes:

3.22            
$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g = - \frac{\beta v_g}{f_0} = \left( \frac{\partial u_g}{\partial x} \right)_p + \left( \frac{\partial v_g}{\partial y} \right)_p$$

répété  
 dimensions             $10^{-6}$      $10^{-6}$      $10^{-5}$      $10^{-5}$   
 caractéristiques  
 ( $s^{-1}$ )

Malgré sa faible grandeur, cette divergence, due à la variation du taux de rotation locale de la terre avec la latitude, peut être calculée avec une erreur de l'ordre de 10% à partir de la composante Nord-Sud ( $v_g$ ) du vent géostrophique.

Étant donné que la divergence du vent géostrophique n'est que de l'ordre de  $10^{-6} s^{-1}$ , il faut tenir compte de la divergence du vent agéostrophique qui est aussi de l'ordre de  $10^{-6} s^{-1}$ . La divergence du vent horizontal comprend ainsi deux composantes: la divergence du vent géostrophique et la divergence du vent agéostrophique.

4.1            
$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g + \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag}$$

dimensions             $10^{-6}$      $10^{-6}$      $10^{-6}$   
 caractéristiques  
 ( $s^{-1}$ )

Étant donné que le premier terme se calcule facilement, le problème du calcul de la divergence horizontale se résout en celui du calcul du vent agéostrophique et de sa divergence avec une erreur pas plus grande que l'ordre de 10%.

Le vent agéostrophique représente la déviation de l'écoulement de l'état d'équilibre exact. Il existe donc un lien entre la composante du vent et de l'accélération:

$$3.2 \quad \vec{V}_{ag} = -\frac{1}{f_0} \frac{d\vec{V}_h}{dt} \times \hat{k}$$

répété

Donc, on pourrait calculer le vent agéostrophique si on connaît l'accélération horizontale du vent. Un exemple de ce rapport se trouve dans la figure 4.1a où la différence au point B entre la direction du vent horizontal et la direction du vent géostrophique (les deux vents ont sensiblement la même grandeur) dévie la force de Coriolis de telle sorte qu'elle n'est pas dans la direction contraire à la force de pression (elle a sensiblement la même grandeur, cependant). La somme des forces dans ce cas produit une accélération dans le sens contraire du vent géostrophique.

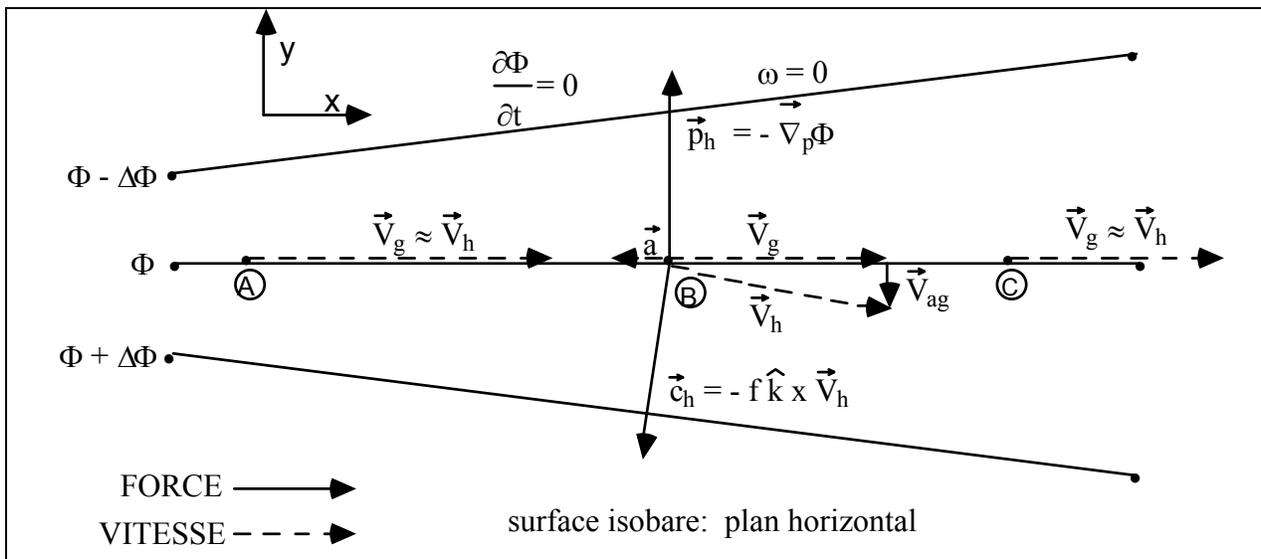
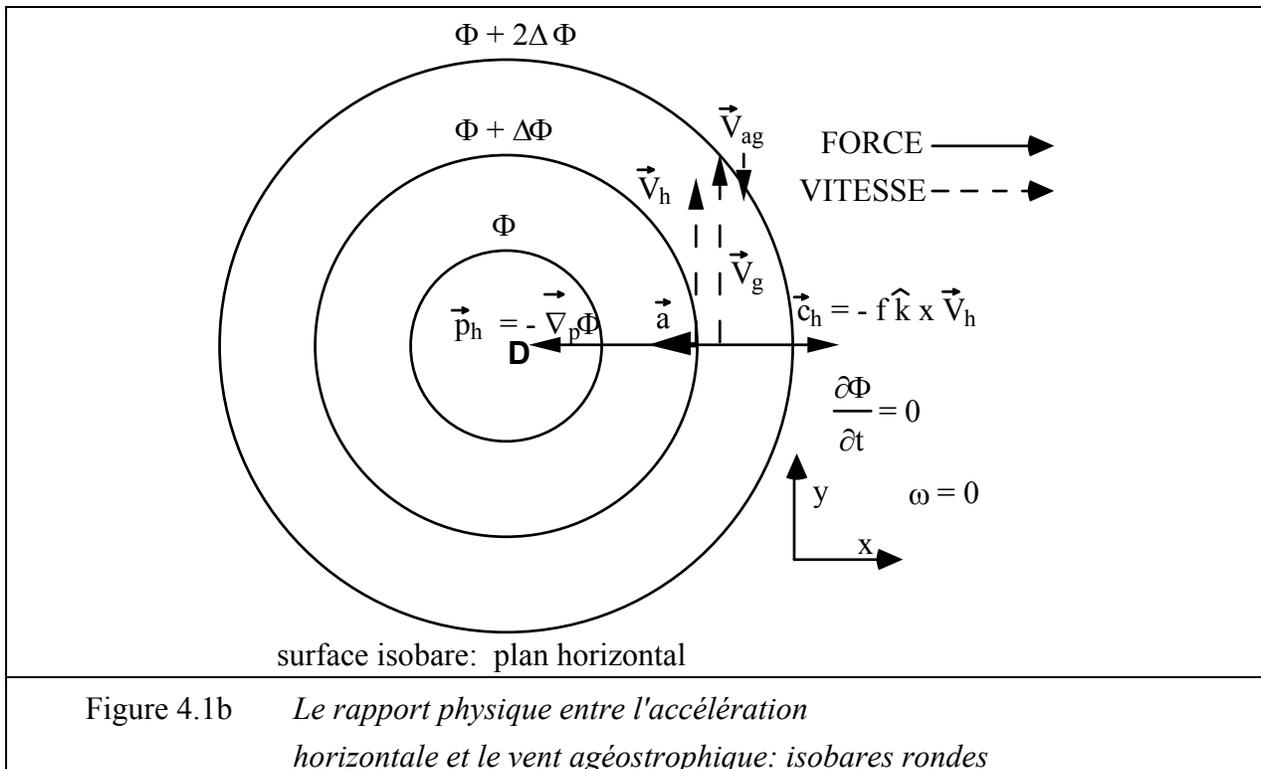


Figure 4.1a *Le rapport physique entre l'accélération horizontale et le vent agéostrophique: isobares écartants*

## 4.2 L'accélération horizontale

Dans le chapitre 3, on avait étudié l'évolution des forces et de l'accélération pour les cas où l'écoulement ne dévie pas trop de l'équilibre sur le plan horizontal. Dans le cas des isobares écartants (figure 3.2), l'accélération moyenne était dans la direction contraire de l'écoulement comme dans la figure 4.1a. Dans le cas d'isobares rondes (figure 4.1b), l'accélération moyenne est dirigée vers la basse pression et l'écoulement est parallèle aux isobares. Dans ces deux cas l'accélération qui s'est développée agissait à garder l'écoulement près de l'état d'équilibre comme l'accélération anticipait les changements de la force de gradient de pression. Cet état, qui n'est pas en équilibre, s'appelle l'état de "balance" ou "l'état balancé". (Voir le module de l'état balancé dans EUROMET.)

Le vent géostrophique est une bonne approximation à cet état. L'erreur du vent géostrophique à la grande échelle n'est que de l'ordre de 10%. Cependant, à cause du fait que le vent géostrophique est peu divergent, il n'est pas une assez bonne approximation pour calculer la divergence (et donc le mouvement vertical et les tendances de pression). On va donc utiliser d'autres caractéristiques de l'état balancé pour mieux estimer le vent.



Généralisant les deux cas de la figure 4 pour le grand échelle, on pourrait déterminer l'accélération moyenne horizontale comme étant celle qui garderait l'écoulement sur le plan horizontal près de l'état d'équilibre. En effet, cette manière d'aborder le problème dépend du raisonnement suivant:

1. L'écoulement est proche de l'état d'équilibre, i.e. le vent est presque géostrophique ( $\vec{V}_h \approx \vec{V}_g$ ).
2. Si le vent géostrophique de la particule change ( $d\vec{V}_g/dt \neq 0$ ), le vent change en moyenne à peu près la même façon, i.e.,

$$4.2 \quad \frac{d\vec{V}_h}{dt} \approx \frac{d\vec{V}_g}{dt}$$

On peut vérifier l'équation 4.2 en prenant la dérivée totale du vent agéostrophique telle que définie dans l'équation 3.2 et ensuite calculer la grandeur caractéristique des termes:

$$\frac{d\vec{V}_{ag}}{dt} = -\frac{1}{f} \frac{d^2\vec{V}_h}{dt^2} \times \hat{k} + \frac{1}{f^2} \frac{df}{dt} \frac{d\vec{V}_h}{dt} \times \hat{k}$$

ou  $\frac{df}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial y} = \beta v$

Alors, avec

$$(a) \quad \frac{1}{f} \left| \frac{d^2\vec{V}_h}{dt^2} \right| \approx \frac{U}{f\tau^2} \approx \frac{U^3}{fL^2} \approx Ro \frac{U^2}{L} \approx 10^{-5}$$

$$(b) \quad \frac{1}{f^2} \frac{df}{dt} \left| \frac{d\vec{V}_h}{dt} \right| \approx \frac{\beta U^2}{f^2\tau} \approx \frac{\beta U^3}{f^2 L} \approx Ro\beta U^2 \approx 10^{-6}$$

on trouve donc que pour un nombre de Rossby  $\approx 0.1$ , la grandeur caractéristique de la dérivée totale du vent agéostrophique est d'un ordre de grandeur inférieur à celle de l'accélération du vent horizontal ( $\approx 10^{-4}$ ). Alors, l'équation 4.2 est vérifiée.

Étant donné que pour une latitude fixe le vent géostrophique est déterminé par la force horizontale de pression, la dérivée totale du vent géostrophique représente essentiellement la variation temporelle (en suivant l'écoulement) de la force de pression. (L'écoulement lui-même est presque géostrophique i.e., il est aussi déterminé par la force horizontale de pression). Donc l'accélération horizontale peut être calculée si on connaît la variation spatiale et temporelle de la force horizontale de pression.

Notons que la force horizontale de la pression est le résultat de la distribution spatiale de la masse atmosphérique et cette force peut être calculée à partir de la pente des surfaces isobares:

$$4.3 \quad \vec{p}_h = -\vec{\nabla}_p \Phi$$

Ainsi, on déduit que la variation spatiale de la force de pression dépend de la deuxième dérivée spatiale de  $\Phi$  (de la distribution spatiale de la masse atmosphérique) tandis que les variations temporelles de cette force dépendent de la dérivée temporelle de la dérivée spatiale de  $\Phi$  (la redistribution de la masse atmosphérique).

Utilisant la définition du vent géostrophique, sa dérivée totale est:

$$4.4a \quad \frac{d\vec{V}_g}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} + u_{ag} \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_{ag} \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} + \omega \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial p}$$

dimensions       $10^{-4}$     $10^{-4}$        $10^{-4}$        $10^{-4}$        $10^{-5}$        $10^{-5}$        $10^{-5}$   
 caractéristiques  
 ( $m \ s^{-3}$ )

Selon les grandeurs caractéristiques, on peut négliger les trois derniers termes en acceptant une erreur de l'ordre de 10% et l'accélération horizontale peut être estimée ainsi:

$$4.4b \quad \frac{d\vec{V}_h}{dt} \approx \frac{d\vec{V}_g}{dt} \approx \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y}$$

Cette formulation de l'accélération pour "l'état balancé" est appelée l'approximation **quasi-géostrophique**: le vent est presque (quasi) géostrophique de sorte que la variation du vent (l'accélération, donc le vent n'est pas exactement géostrophique) est donnée par la variation du vent géostrophique (ou l'écoulement est calculé utilisant le vent géostrophique).

Les termes "d'advection du vent géostrophique par le vent géostrophique" représentent la variation du vent géostrophique (ou la force de pression, si on veut) dans la direction de l'écoulement.

$$u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} = u_g \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{f} \vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k} \right)$$

4.4c

$$v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} = v_g \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{f} \vec{\nabla}_p \Phi \times \hat{k} \right)$$

Ces termes se calculent à partir du champ des isohypses (disponible des sondages aérologiques). Cependant, sauf pour les campagnes de mesures spéciales, la dérivée locale du vent géostrophique reste en général inconnue étant donné que les sondages sont disponibles seulement toutes les 12 heures, une résolution temporelle non suffisante.

Vers la fin du chapitre, on verra qu'il sera possible de calculer cette tendance locale du vent géostrophique. Entre-temps on calculera le vent agéostrophique et sa divergence.

### 4.3 Vent agéostrophique et la divergence

À cause de l'existence du rapport entre le vent agéostrophique et l'accélération, ainsi que la dépendance de l'accélération des variations spatiales et temporelles de la force de gradient de pression, on déduit que le vent agéostrophique, et donc sa divergence, dépend aussi de ces variations de la force de pression. Deux exemples se trouvent dans les figures 4.2 et 4.3 où on a supposé qu'en moyenne:

$$4.5 \quad \frac{d\vec{V}_h}{dt} = \frac{d\vec{V}_g}{dt}$$

Donc, selon l'équation 3.2 le vent agéostrophique peut être calculé comme suit:

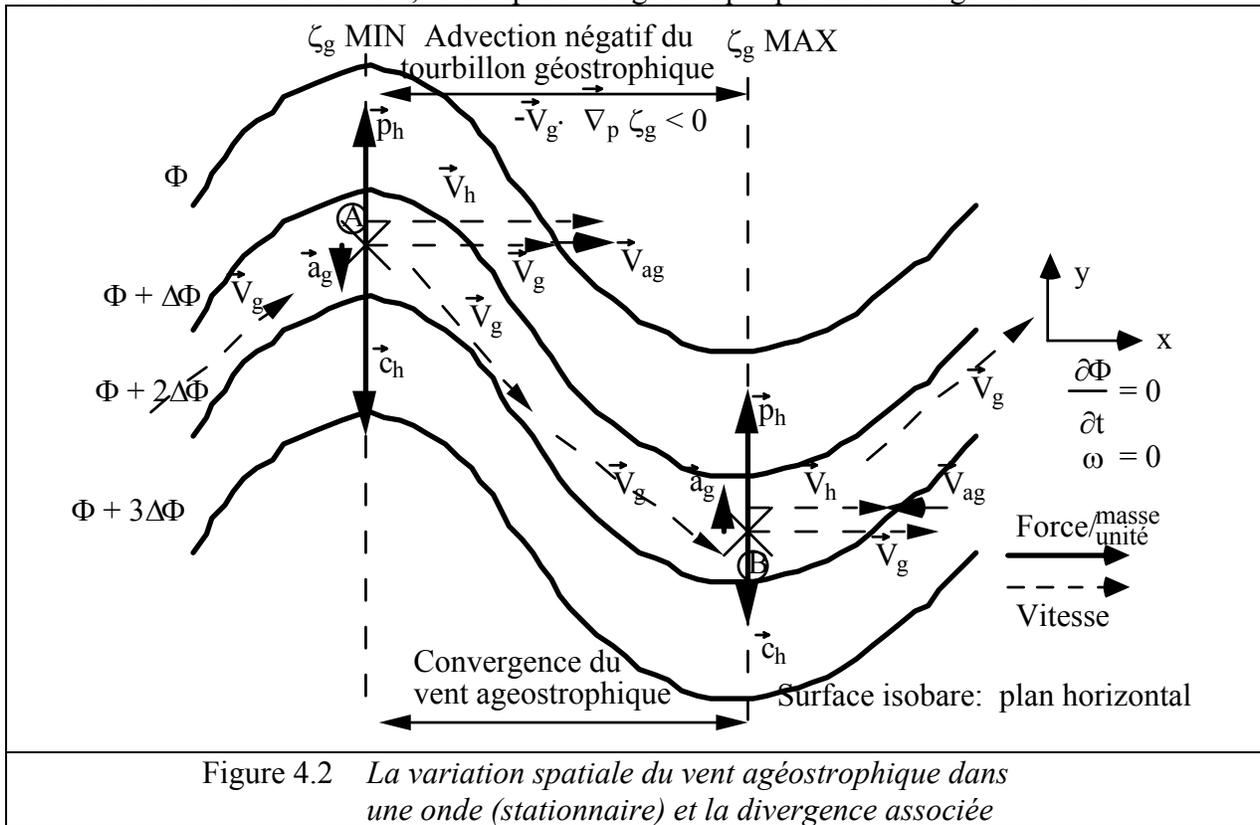
$$4.6a \quad \vec{V}_{ag} = -\frac{1}{f_0} \frac{d\vec{V}_g}{dt} \times \hat{k}$$

Ensuite en faisant l'expansion de la dérivée totale selon l'équation 4.4b, on trouve:

$$4.6b \quad \vec{V}_{ag} = -\frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} \right] \times \hat{k}$$

Dans la figure 4.2 on trouve que la distribution des isohypses d'une surface isobare prend forme d'une onde. Pour éliminer, pour le moment, les variations temporelles, on suppose que la distribution des isohypses est stationnaire, c'est-à-dire que la distribution ne change pas avec le temps ( $\partial \nabla_p \Phi / \partial t = 0$ ). Donc, les particules d'air traversent cette distribution et les variations de la force de pression qu'elles subissent seront dues au déplacement des particules à travers ce champ du géopotential. La distance entre les isohypses est partout constante de sorte que la

grandeur de la force de pression ne change pas mais sa direction change. Au point A l'accélération géostrophique se dirige vers le bas tandis qu'au point B, elle se dirige vers le haut. Par conséquent, la composante agéostrophique au point A (selon l'équation 4.6) est vers la droite, dans la même direction que le vent géostrophique. Au point B, cette composante est dans la direction contraire. Clairement, la composante agéostrophique est convergente entre A et B.



Dans la figure 4.2, on remarque aussi que le tourbillon géostrophique est minimum au points A, et maximum au point B. Entre A et B, le vent géostrophique souffle d'un minimum à un maximum de tourbillon géostrophique: advection négative du tourbillon géostrophique. On peut donc associer la convergence (divergence) de la composante agéostrophique du vent avec une distribution des isohypses qui produit l'advection négative (positive) de tourbillon géostrophique. Il faut rappeler qu'ici, on ne considère que la variation spatiale de la force de pression.

## Variations temporelles

Dans la figure 4.3, on trouve sur la surface isobare deux distributions des isohypses autour des points A, B et C. La distribution en haut de la figure est au temps  $T$  et celle en bas est au temps  $\Delta t$  plus tard. Pour le temps  $T$  on trouve aussi les isallohypses (lignes de  $\partial\Phi/\partial t$ ) et on remarque que la hauteur est stationnaire à gauche et à droite tandis qu'elle chute au milieu (autour de C). Par conséquent à  $T + \Delta t$ , on trouve un creux de hauteur autour de C. Le vent géostrophique, qui était constant partout à  $T$  se trouve à  $T + \Delta t$ , à souffler du nord-ouest à A et du sud-ouest à B mais il n'a pas changé à C.

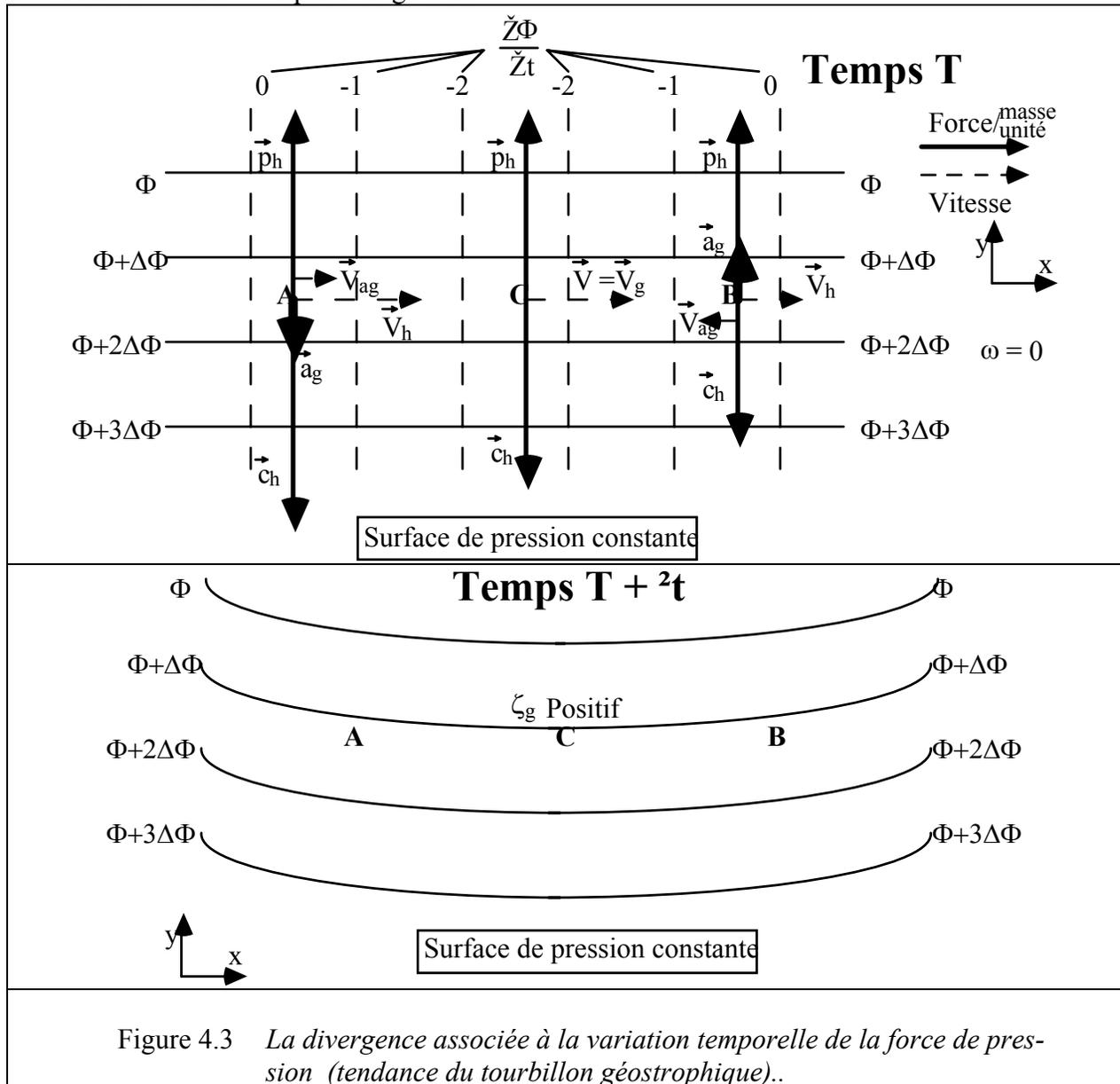


Figure 4.3 La divergence associée à la variation temporelle de la force de pression (tendance du tourbillon géostrophique)..

Au temps T clairement, à C, l'accélération géostrophique est nulle et à A, elle se dirige vers le bas ( $y < 0$ ) et à B, vers le haut ( $y > 0$ ). Donc, la composante agéostrophique du vent souffle de A vers C et de B vers C: il est convergent à C. Encore, on remarque qu'au temps T le tourbillon géostrophique ( $\zeta_g$ ) était nul à C tandis qu'au temps T +  $\Delta t$  le tourbillon géostrophique est positif à C. Donc, avec une distribution des isalohypses qui produit une augmentation (diminution) locale de tourbillon géostrophique, on peut associer la convergence (divergence) de la composante agéostrophique du vent. Il faut rappeler qu'ici on n'a considéré que la contribution à la divergence est dûe à la variation temporelle de la force de pression.

### Calcul de la divergence du vent agéostrophique

Maintenant, on calculera la divergence du vent agéostrophique à partir des équations 4.4 et 4.6. D'abord on prend la divergence de l'équation 4.6a.

$$4.6a \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag} = -\vec{\nabla}_p \cdot \frac{1}{f_0} \frac{d\vec{V}_g}{dt} \times \hat{k}$$

( $f_0$  indique qu'on suppose que  $f$  ne varie pas; on élimine donc le développement des termes qu'on trouvera d'être un ordre de grandeur plus petits que les termes dominants). En substituant pour  $d\vec{V}_g/dt$  utilisant l'équation 4.4b on trouve:

$$4.7 \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag} = -\vec{\nabla}_p \cdot \frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial y} \right] \times \hat{k}$$

Notons que:

$$\vec{V}_g \times \hat{k} = (u_g \hat{i} + v_g \hat{j}) \times \hat{k} = v_g \hat{i} - u_g \hat{j}$$

et que

$$\vec{\nabla}_p \cdot (\vec{V}_g \times \hat{k}) = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \zeta_g$$

L'équation 4.7 devient:

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag} = -\frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \zeta_g}{\partial y} + \zeta_g \left[ \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right] \right]$$

dimensions  
caractéristiques  
(s<sup>-1</sup>)

10<sup>-6</sup>    10<sup>-6</sup>    10<sup>-6</sup>    10<sup>-7</sup>

Négligeant les termes caractéristiquement d'un ordre de grandeur plus petit, on trouve que la divergence du vent agéostrophique égale approximativement (erreur ≈ 10%):

$$4.8 \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag} = -\frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} \zeta_g \right]$$

L'équation 4.8 confirme des résultats des cas dans les figures 4.2 et 4.3.

#### L'équation quasi-géostrophique du tourbillon

En combinant l'équation 4.8 avec l'équation 3.22 on trouve la divergence totale du vent horizontal:

$$4.9 \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_{ag} + \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_g = -\frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} \zeta_g \right] - \frac{\beta v_g}{f_0}$$

Notons que:

$$\frac{\beta v_g}{f_0} = \frac{1}{f_0} \left[ \vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} f \right]$$

on arrive à **L'équation quasi-géostrophique du tourbillon**

$$4.10 \quad \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h = -\frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right]$$

Ces équations confirment aussi les associations qu'on a fait lors des discussions sur les figures 4.2 et 4.3; c'est-à-dire la divergence (convergence) du vent agéostrophique est associée avec une diminution (augmentation) locale du tourbillon géostrophique et l'advection positive

(négative) du tourbillon. Rappelons que le rapport entre la divergence du vent géostrophique et la composante nord-sud du vent géostrophique a déjà été pleinement discuté dans le chapitre 3.

#### 4.4 Tendance locale du tourbillon géostrophique

Dans la section précédente on a constaté la nécessité de connaître la tendance locale du tourbillon et du vent géostrophique afin de calculer le vent agéostrophique et sa divergence. Le fait que les observations aérologiques ne sont disponibles normalement que toutes les 12 heures implique qu'on n'a pas assez de résolution temporelle et qu'il nous faut une méthode pour calculer ces tendances locales. Étant donné que le tourbillon géostrophique ne dépend localement que de la distribution de la force de pression qui à son tour dépend du gradient de hauteur, on peut déduire que la tendance du tourbillon géostrophique dépend de la tendance de la hauteur:

$$4.11 \quad \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Le fait que l'atmosphère est hydrostatique et qu'elle suit la loi des gaz parfaits nous dit que la hauteur d'une surface isobare dépend de la pression au sol et de la température entre le sol et cette surface isobare:

$$2.7 \quad \Phi_{p^*} = \left[ R \int_{p^*}^{p_s} T \frac{dp}{p} \right] + \Phi_s$$

répété

Cette équation nous permet de calculer la tendance de la hauteur d'une surface à partir de la tendance de pression au sol et la tendance de la température entre le sol et cette surface isobare (Règle de Leibnitz):

$$4.12 \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{p^*} = \underbrace{\left[ R \int_{p^*}^{p_s} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{dp}{p} \right]}_{(A)} + \underbrace{R \frac{T_s}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial t}}_{(B)}$$

Notons que le terme B dans l'équation 4.12 ci-haut pourrait être évalué à partir des observations horaires au sol. L'évaluation du terme A, cependant, exigerait les observations aérologiques très fréquentes. Mais il existe un espoir en invoquant l'équation 4.12a qui vient de l'équation 2.35.

$$4.12a \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V}_h \cdot \vec{\nabla} T + S\omega + \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt}$$

Étant donné que le vent horizontal ( $\vec{V}_h$ ) est toujours près d'un état d'équilibre: soit  $\vec{V}_h \approx \vec{V}_g$  dans l'atmosphère libre, soit  $\vec{V}_h \approx \vec{V}_r$  dans la couche limite, on pourrait remplacer  $\vec{V}_h$  dans 4.12a par  $\vec{V}_e$  ou le souscrit e représente le vent d'équilibre dépendant dans quelle couche le vent se trouve:

$$4.13 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T + S\omega + \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt}$$

On fait donc une erreur de l'ordre de 10% en utilisant ce vent à la place du vent horizontal.

En substituant l'équation 4.13 dans l'équation 4.12, la tendance de la hauteur peut être évaluée comme suit:

$$4.14 \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{p^*} = R \int_{p^*}^{p_s} \left[ -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T + S\omega + \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} \right] \frac{dp}{p} + R \frac{T_s}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}$$

On peut maintenant substituer cette équation 4.14 dans l'équation 4.11 pour la tendance locale du tourbillon géostrophique.

$$4.15 \quad \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right)_{p^*} = \frac{R}{f_o} \nabla^2 \int_{p^*}^{p_s} \left[ -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T + S\omega + \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} \right] \frac{dp}{p} + \frac{R}{f_o} \nabla^2 \frac{T_s}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}$$

En passant la Laplacien à l'intérieur de l'intégrale (utilisant la règle de Leibnitz) et ensuite aux trois variables dans le dernier terme, on produit plusieurs termes. Cependant, négligeant ces termes qui ont deux ordres de grandeur inférieur, l'équation 4.15 réduit à.

$$4.16 \quad \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right)_{p_s} = \frac{R}{f_0} \int_p^{p_s} \left[ \nabla^2 \left( -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T \right) + \nabla^2 (S\omega) + \frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt} \right] \frac{dp}{p} + \frac{R}{f_0} \frac{T_s}{p_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t}$$

(A)                      (B)                      (C)                      (D)

Notre problème n'est donc pas résolu. Le calcul de la tendance locale du tourbillon géostrophique exige des paramètres qu'on ne connaît pas: la Laplacien des sources diabatiques (C) et la Laplacien d'oméga (B) qui est un des paramètres qu'on recherche (parce qu'il dépend de la divergence).

### Approximation pour la basse troposphère

Cependant dans la basse troposphère (1000 à 800 hPa) l'intégrale est petite ( $\approx 0.1$ ), les trois termes A, B et C sont généralement petits et on peut dire que:

$$\left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right) - \frac{R}{f_0} \frac{T_s}{p_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t} - \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right)_{p_s}$$

En tout temps, le terme A pourrait toujours être calculé à partir des observations aérologiques. Le terme B, qui dépend du laplacien d'oméga dans la couche entre le sol et le niveau p, pourrait être estimé pour une couche dans la basse troposphère en utilisant la Laplacien d'oméga au sommet de la couche limite ( $\nabla^2(S\omega) \approx \nabla^2(S\omega_{CL})$ ). Cette approximation est généralement valable parce que la couche limite représente une bonne partie de la basse troposphère et  $\omega$  varie généralement lentement sur le plan vertical dans l'atmosphère libre à cause de la faible grandeur de la divergence horizontale. À son tour, le terme C ( $\nabla^2(dq/dt)$ ) pourrait aussi être calculé avec une certaine erreur en utilisant les méthodes de paramétrisation.

Donc, dans la basse troposphère, l'équation 4.16 peut devenir:

$$4.17 \quad \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right)_{p^*} = \frac{R}{f_0} \int_{p^*}^{p_s} \left[ \nabla^2 \left( -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T \right) + \nabla^2 (S\omega_{CL}) + \frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt} \right] \frac{dp}{p} + \frac{R}{f_0} \frac{T_s}{p_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t}$$

En ce qui concerne la tendance locale du vent géostrophique dans la haute et mi-troposphère, il faudra prendre une approche plus compliquée qui est décrite dans la section suivante.

#### 4.5 La divergence et le mouvement vertical

Dans cette section, on va tenter de trouver une équation dans laquelle il n'y a qu'une inconnue: la divergence horizontale. Utilisant la tendance de tourbillon de l'équation 4.16 dans l'équation du tourbillon quasi-géostrophique (l'équation 4.10).

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_{p^*} &= \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right)_{p^*} = - \left[ \underbrace{\frac{R}{f_0^2} \int_{p^*}^{p_s} \left[ \nabla^2 \left( -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T \right) \right]}_{(A)} + \underbrace{\nabla^2 (S\omega)}_{(B)} + \underbrace{\frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt}}_{(C)} \right] \frac{dp}{p} + \underbrace{\frac{R}{f_0^2} \frac{T_s}{p_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t}}_{(D)} + \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right) \\
 4.18 \quad &+ \underbrace{\frac{1}{f_0} \left[ -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right]}_{(E)}_{p^*}
 \end{aligned}$$

Notons que tous les termes dans l'équation 4.18 sont calculables à partir des observations ou par les méthodes de paramétrisation sauf  $\omega$  dans le terme B; mais  $\omega$  selon l'équation de continuité est l'intégral de la divergence. Donc, on peut remplacer  $\omega$  dans l'équation 4.18 par l'intégrale de la divergence.

$$\omega_{p^*} = \omega_s + \int_{p^*}^{p_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_h dp$$

Donc, on a une seule inconnue: la divergence.

Cette équation (4.18) est très difficile à interpréter physiquement parce qu'au moins 3 termes dépendent de la divergence: 1) le côté gauche, 2) la tendance de pression dans le terme D et 3)  $\omega$  dans le terme B.

La méthode classique pour résoudre cette équation (4.18) suit. D'abord, on substitue  $\partial\omega/\partial p$  pour la divergence ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_h$ ) sur le côté gauche (utilisant l'équation de continuité). Ensuite, on dérive le résultat par p qui élimine le terme D:

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}\right)_{p^*} = -\frac{R}{f_0^2 p} \left[ \nabla^2 \left( -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T \right)_{p^*} + \nabla^2 (S\omega) + \frac{1}{c_p} \left[ \nabla^2 \frac{dq}{dt} \right]_{p^*} \right] + \frac{1}{f_0} \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left[ -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right] \right]_{p^*}$$

Réarrangeant les termes, on a:

$$4.19 \quad \nabla^2 (S\omega) + \frac{p f_0^2}{R} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \right)_{p^*} = \left[ -\nabla^2 \left( -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla} T \right) - \frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt} + \frac{p f_0}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left[ -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right] \right]_{p^*}$$

Sur le côté gauche on trouve  $\omega$  isolé (avec la stabilité): la seule inconnue. Lorsque cette équation est appliquées seulement dans l'atmosphère libre et on suppose que la stabilité varie peu sur le plan horizontal (erreur  $\approx 10\%$ ), le résultat est **l'équation quasi-géostrophique d'oméga**:

$$4.20 \quad \nabla^2 \omega + \frac{p f_0^2}{R S} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -\frac{1}{S} \nabla^2 \left( -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} T \right) - \frac{1}{S} \frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt} + \frac{p f_0^2}{R S} \frac{\partial}{\partial p} \left[ -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right]$$

Pour résoudre cette équation elliptique, il faut les fonctions sur le côté droit (appelées “les fonctions forçantes ou d'influences”) partout dans le domaine, et les valeurs d'oméga sur les frontières supérieures, inférieures et latérales du domaine. L'interprétation physique de l'équation dans cette forme est un peu plus facile. On peut dire qu'une fois que les conditions de frontières sont établies la distribution d'oméga (et, donc, la divergence) est déterminée uniquement par les trois fonctions d'influence et la stabilité. Deux de ces fonctions, l'advection de température et du tourbillon dépendent surtout de la distribution spatiale de la masse atmosphérique. Plus tard, nous allons voir que le premier et le troisième terme sur la coté droite de 4.20 peuvent être combiné en un seule terme (vecteur Q - voir module dans EUROMET). Cependant, on ne peut pas comprendre d'avantage à partir de cette équation.

La solution de cette équation pourrait être trouvée par les méthodes numériques (par exemple: relaxation). La condition de frontière inférieure de 4.20 ne pose pas trop de problèmes; on utilise  $\omega$  au sommet de la couche limite (paramétrisé ou calculé). La condition de frontière supérieure n'est pas connue sauf près du sommet de l'atmosphère où  $\omega$  tend vers zéro. Les

conditions latérales, aussi inconnues, sont arbitraires. Il faut donc utiliser un domaine beaucoup plus grand que la région d'intérêt afin de minimiser les erreurs dues à ces conditions de frontière qu'on suppose homogènes ( $\omega = 0$ ).

Étant donné que l'opérateur de l'équation 4.19 est linéaire, nous pouvons résoudre l'équation pour chaque forçage indépendamment (en utilisant des conditions aux frontières homogènes). En plus l'équation peut être résolu sans forçages mais avec les conditions aux frontières orographiques et de friction. Dans cette façon, nous pouvons séparer le mouvement vertical peuvent selon les forçages:

$$4.21 \quad \omega_T = \omega_\zeta + \omega_{AT} + \omega_D + \omega_F + \omega_O$$

Dans l'éq. 4.21, les souscrits réfèrent aux forçages:  $\zeta$ -advection de tourbillon, AT-advection de température, D-effets diabatique (exemple: dégagement de chaleur latente), F-frottement, et O-effets orographiques.

#### 4.6 Mouvement vertical dans la moitié inférieure de l'atmosphère

Utilisons une expansion en série de Taylor afin de calculer le mouvement vertical à  $p$  à partir de  $\omega$  et ses dérivées au sommet de la couche limite.

$$4.22 \quad \omega = \omega_{CL} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{CL} (p_{CL} - p) + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \right)_{CL} \frac{(p_{CL} - p)^2}{2} + \dots$$

grandeurs caractéristiques  
à 750 mb pour  $p_{CL} = 950$  mb ( $\text{Pa s}^{-1}$ )

$10^{-1}$	$10^{-1}$	$2 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^{-3}$
-----------	-----------	--------------------	--------------------

Selon les analyses des grandeurs caractéristiques, pour calculer  $\omega$  à 850 mb, il s'agit, en général, d'utiliser  $\omega$  au sommet de la couche limite; eg.  $\omega_{850} \approx \omega_{cl}$ . Cependant, pour  $\omega$  à 600 mb, il faut absolument tenir compte de la divergence dans l'atmosphère libre, mais on peut souvent négliger le terme de deuxième ordre.

Zwack et Kabil, (Mon. Wea. Rev., 1988) ont suggéré l'approche suivante pour estimer la divergence est le mouvement vertical dans la basse atmosphère à partir des observations au sol. D'abord, ils calculent la divergence quasi-géostrophique au sol à partir de l'équation de tourbillon quasi-géostrophique (4.10) où la tendance de tourbillon au sol est calculé utilisant les tendances de pression:

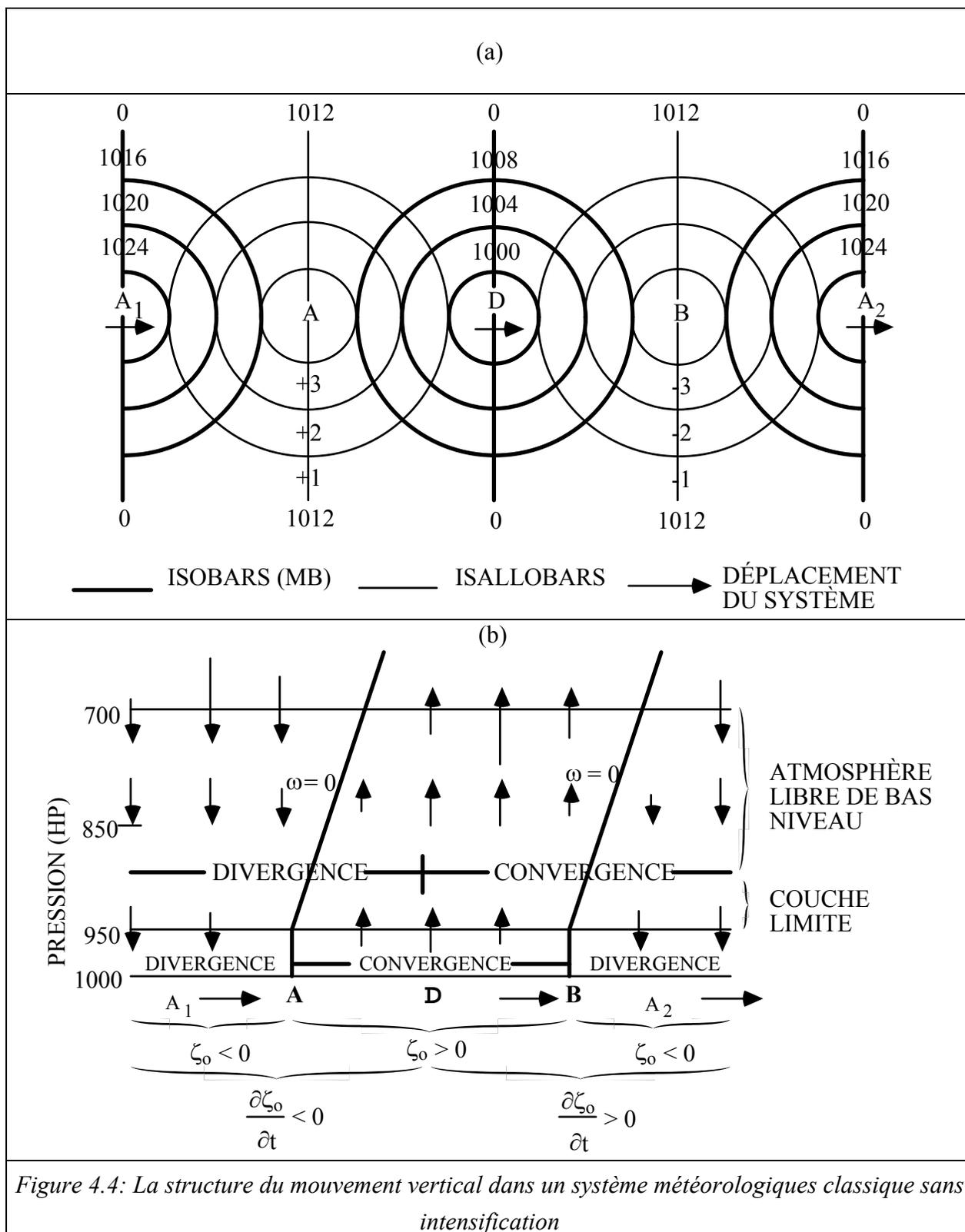
$$4.23 \quad \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right)_s = \frac{R}{f_0} \frac{T_s}{P_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t}$$

À cause de sa faible grandeur dans la basse atmosphère, l'advection de tourbillon géostrophique absolue par le vent géostrophique peut être généralement négligée, mais on pourrait toujours le calculer à partir du champs de pression au niveau de la mer. Ensuite, on interpole la divergence entre le sol et un niveau de non-divergence au milieu de la troposphère vers 600 mb en supposant que la divergence dans l'atmosphère décroît linéairement de sa valeur au sol et le zéro au niveau de non-divergence (voir la figure 4.4). Étant donné que la divergence dans la couche limite n'est pas quasi-géostrophique, on n'utilise que la partie de la courbe de la figure 4.4 qui est dans l'atmosphère libre.

Utilisant cette méthode, on pourrait donc estimer la divergence au sommet de la couche limite, et ensuite le pente de  $\omega$ :  $[(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})_{CL} = -(\check{Z}_w / \check{Z}_p)_{CL}]$ . La deuxième dérivée est spécifiée lorsqu'on suppose que la divergence décroît linéairement à zéro à 600 mb.  $(\omega)_{CL}$  est spécifié utilisant la théorie du chapitre 3, e.g.,

$$4.24 \quad \omega_{CL} = \omega_s - \left[ \rho_s g (p_{CL} - p) \frac{\zeta_{gs}}{2\pi} \right] \sin(2\alpha_s)$$

où  $\omega_s$  est le mouvement vertical orographique et  $\alpha_s$  est l'angle entre le vent de surface et les isobares.



Une autre façon qui est équivalente à cette approche est d'intégrer l'équation de continuité du sommet de la couche limite jusqu'au niveau désiré:

$$4.25 \quad \omega_{p^*} = \omega_{CL} + \int_{p^*}^{P_{CL}} \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h dp$$

où  $\omega_{CL}$  est spécifié à partir de l'équation 4.24.

Appliquons l'équation 4.25 au système synoptique en surface décrit dans la figure 4.4a. Ce système se déplace vers la droite sans développement, i.e.  $(\partial\zeta_g/\partial t)_s = 0$  au centre du système. À la figure 4.4b on trouve la distribution de la divergence et du mouvement vertical dans la couche limite et la basse atmosphère libre. Pour déduire cette distribution, on a servi de la théorie ci-haut en supposant qu'il n'y a pas d'effet orographique.

### Couche limite

Dans la couche limite, la divergence est proportionnelle au tourbillon géostrophique. Il y a donc de la convergence dans la dépression et de la divergence dans les anticyclones. Étant donné que le mouvement vertical au sol pourrait être considéré nul, par continuité la convergence (divergence) sur le plan horizontal dans la dépression (l'anti-cyclone) doit "produire" de la divergence (convergence) sur le plan vertical et donc du mouvement ascendant (descendant) au sommet de la couche limite.

### Atmosphère libre

Étant donné que les systèmes sont ronds, il n'y a pas d'advection de tourbillon absolu (on peut négliger l'advection de  $f$ ). Donc la divergence quasi-géostrophique dépendra de la tendance du tourbillon géostrophique, i.e.  $(\partial\zeta_g/\partial t) = 1/f_0 \nabla^2 (\partial\Phi/\partial t) \propto \nabla^2 (\partial p_s/\partial t)$ . La tendance de tourbillon est donc positive (négative) en avant (arrière) de la dépression et dans la basse atmosphère libre il y a de la convergence (divergence) en avant (arrière) de la dépression.

Remarquons que dans la couche limite la convergence se trouve dans la dépression (où  $\zeta_g > 0$ ) mais dans la basse atmosphère libre, la convergence est en avant de la dépression (où  $(\partial\zeta_g/\partial t) > 0$ ). Donc ces convergences ne sont pas en phase et donnent une pente au structure du

mouvement vertical. Pour un système qui développe, les deux convergences seraient mieux alignées, donc la structure du mouvement vertical sera plus vertical tandis que le contraire sera le cas pour un système en dégénération.

#### 4.7 Tendance de pression au sol

On a vu dans le chapitre 2 que la tendance de pression au sol égal l'intégrale de la divergence dans la colonne au-dessus. On a aussi vue que, selon les dimensions caractéristiques, il faut que la divergence change son signe au moins une fois sur le plan vertical et que la partie divergente égale à peu près la partie convergente. Un exemple se trouve dans la figure 4.5. Ces faits suggèrent que lorsqu'on intègre la divergence jusqu'au sommet de l'atmosphère et on inclue la divergence dans la couche limite, la somme des intégrales s'annule à peu (i.e.10%) près:

$$4.26 \quad 0 = \omega_s + \int_{p_{CL}}^{p_s} \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h dp + \int_0^{p_{CL}} \vec{\nabla}_p \cdot \vec{V}_h dp$$

Pour les deux premiers termes sur le côté droit, on peut substituer  $\omega_{CL}$ , qui inclut implicitement la tendance de pression au sol, les effets orographiques ( $\omega_s$ ) et les effets du frottement. Pour le troisième terme, on peut substituer l'équation 4.18.

$$4.27 \quad 0 = \omega_{CL} - \frac{R}{f_0^2} \int_0^{p_{CL}} \int_{p^*}^{p_s} \left[ \nabla^2 \left( -\vec{V}_e \cdot \vec{\nabla}_h T \right) + \nabla^2 (S\omega) + \frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt} \right] \frac{dp}{p} dp^*$$

$$- \frac{R}{f_0^2} \frac{T_s}{p_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t} \int_0^{p_{CL}} dp + \frac{1}{f_0} \int_0^{p_{CL}} \left[ -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right] dp$$

Donc, on peut résoudre l'équation 4.27 pour  $(\partial\zeta_g/\partial t)_s = (R T_s/p_s f_o) \nabla^2 (\partial p_s/\partial t)$  (équation Zwack-Okkosi):

$$\begin{aligned}
 4.27 \quad \left[ \frac{\partial\zeta_g}{\partial t} \right]_s &= \frac{R T_s}{f_o p_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t} = \\
 &= \frac{f_o}{p_{CL}} \omega_{CL} - \frac{R}{p_{CL} f_o} \int_0^{p_{CL}} \int_{p^*}^{p_s} \left[ \nabla^2 (-V_e \cdot \nabla T) + \nabla^2 (S\omega) + \frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt} \right] \frac{dp}{p} dp^* + \\
 &\quad + \frac{1}{p_{CL}} \int_0^{p_{CL}} \left[ -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right] dp
 \end{aligned}$$

Étant donné que nous avons déjà séparé le mouvement vertical selon les forçages, nous pouvons récrire l'éq. 4.27 de sorte que les contributions individuelles des forçages à la tendance de tourbillon au sol soient claires.

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial\zeta_g}{\partial t} \right]_s &= \frac{R T_s}{f_o p_s} \nabla^2 \frac{\partial p_s}{\partial t} = \\
 &= \frac{f_o}{p_{CL}} (\omega_F + \omega_O) - \frac{R}{p_{CL} f_o} \int_0^{p_{CL}} \int_{p^*}^{p_s} \nabla^2 S(\omega_F + \omega_O) \frac{dp}{p} dp^* \quad (\text{Friction et Orographie}) \\
 4.28 \quad &- \frac{R}{p_{CL} f_o} \int_0^{p_{CL}} \int_{p^*}^{p_s} \left[ \nabla^2 (-V_e \cdot \nabla T) + \nabla^2 (S\omega_{AT}) \right] \frac{dp}{p} dp^* \quad (\text{Advection de température}) \\
 &- \frac{R}{p_{CL} f_o} \int_0^{p_{CL}} \int_{p^*}^{p_s} \left[ + \frac{1}{c_p} \nabla^2 \frac{dq}{dt} + \nabla^2 (S\omega_D) \right] \frac{dp}{p} dp^* \quad (\text{Effets diabatiques}) \\
 &+ \frac{1}{p_{CL}} \int_0^{p_{CL}} \left[ -\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla} (\zeta_g + f) \right] dp - \frac{R}{p_{CL} f_o} \int_0^{p_{CL}} \int_{p^*}^{p_s} \left[ + \nabla^2 (S\omega_\zeta) \right] \frac{dp}{p} dp^* \quad (\text{Advection de tourbillon})
 \end{aligned}$$

Cela veut dire que l'atmosphère réagit au termes d'influence en produisant un Laplacien de tendance de pression. La tendance elle-même n'a peu d'importance instantanément. Cependant, les changements du champs de pression peut modifier plus tard les forçages. (On ne peut pas non plus calculer la tendance de pression en intégrant la divergence directement à cause des erreurs de mesure, i.e., la tendance est due aux petites différences de la divergence dans les couches atmosphérique). Cependant, on pourrait calculer le champ du Laplacien des tendances à partir de l'équation 4.28, et ensuite retrouver le champ de tendance de pression.

Avec le mouvement vertical divisé selon des forçages, nous pouvons utiliser l'éq. 4.12a afin de calculer la contribution de chaque forçage au changement locale de la température:

$$4.29 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\left( -\vec{V}_h \cdot \vec{\nabla} T + S\omega_{AT} \right)}_{\text{Adv T}} + \underbrace{S\omega_\zeta}_{\text{Adv } \zeta} + \underbrace{S(\omega_F + \omega_O)}_{\text{Frict et Orog}} + \underbrace{\left( S\omega_D + \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} \right)}_{\text{Effets diab}}$$

Un fois que la tendance de température et la tendance de tourbillon au sol sont divisées selon les forçages (G), la tendance de tourbillon à n'importe quel niveau  $p^*$  peut aussi être divisée aussi en utilisant une version de l'éq.4.15 ou nous avons remplacé l'intégrant par la tendance locale de température et le dernier terme à droit par la tendance de tourbillon au sol:

$$4.30 \quad \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right)_{p^*}^G = \frac{R}{f_0} \nabla^2 \int_{p^*}^{p_s} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)^G \frac{dp}{p} + \left( \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \right)_s^G$$

Ces équations (4.21, 4.28, 4.29, 4.30) forment un système qui permet l'étude des systèmes météorologiques (la structure du mouvement vertical et des tendances de géopotential). Dans vos travaux qui suivront, nous allons essayer de comprendre physiquement et quantitativement, le rôle des différents forçages dans le développement et l'évolution des systèmes météorologiques.

#### 4.8 Interprétation physique: Exemple du réchauffement diabatique

Voir État balancé dans EUROMET et

<http://people.sca.uqam.ca/~peter/adjustement/home.html>

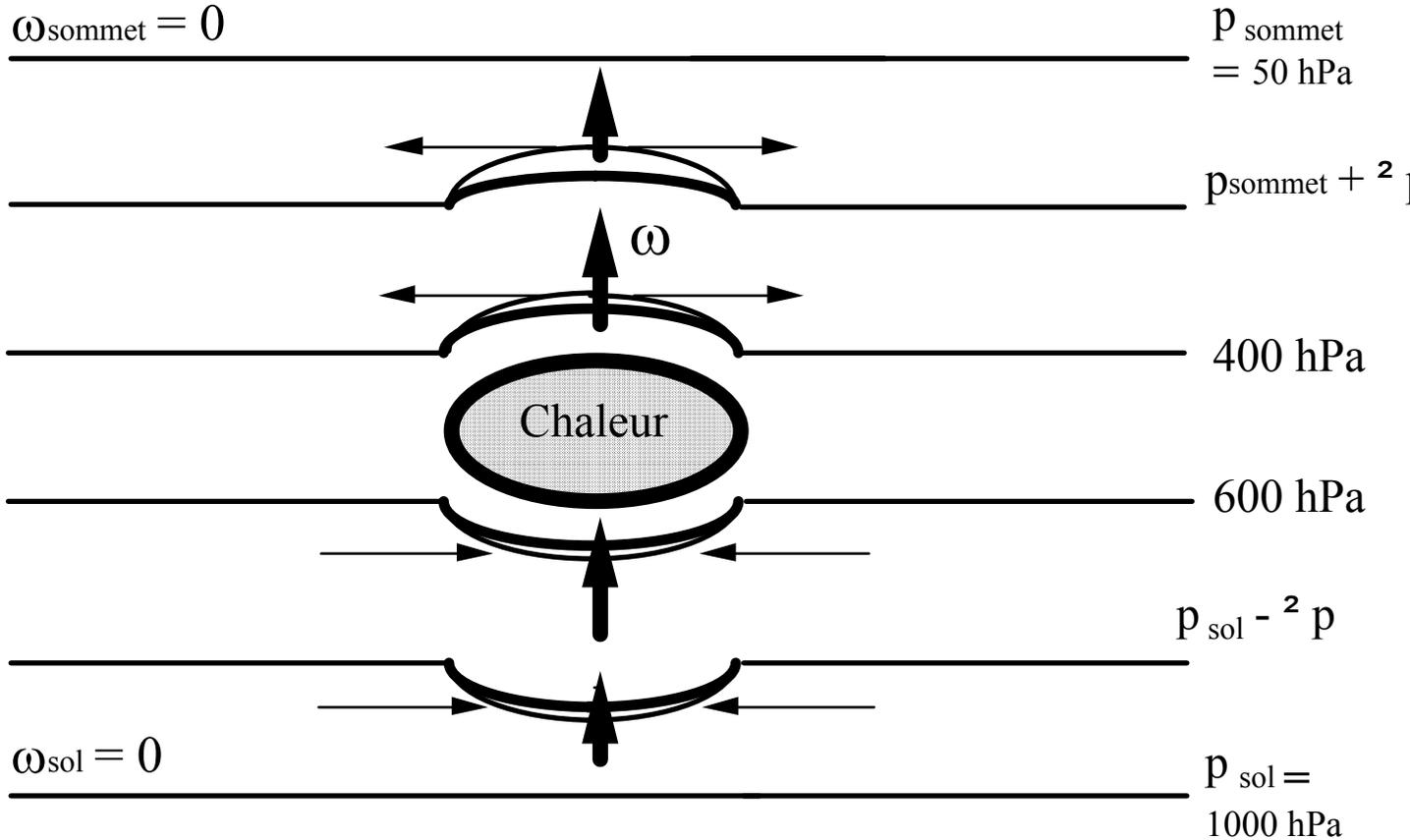


Figure 4.5 Schéma d'un réchauffement diabatique localisé entre 400 et 600 hPa. Les surfaces de pression (lignes minces) indiquent une hausse ou une baisse de pression (lignes minces courbées). Lorsque l'atmosphère est stable les hausses et les baisses de pression deviennent moins importantes (lignes courbées très épaisses). Les flèches minces représentent le changement de la force de gradient de pression et la direction des vents agéostrophiques. Les flèches très épaisses montrent le mouvement vertical généré par le réchauffement diabatique.

Imaginons ce que devrait causer un réchauffement diabatique maximal au milieu de la troposphère, localisé dans un espace restreint horizontalement et verticalement. D'abord, les surfaces isobares sont toutes horizontales. Lorsqu'un réchauffement diabatique a lieu entre 400 et 600 hPa, par exemple, l'épaisseur de la couche réchauffée augmentera (selon l'approximation hydrostatique et la loi des gaz parfaits) et par conséquent les surfaces de pression au-dessus du niveau de réchauffement se soulèveront (figure 4.5). Ensuite, cette différence de pression au-dessus du niveau réchauffé causera une nouvelle force du gradient de pression horizontal sur une surface de hauteur qui pointerà tel qu'indiqué à la figure 4.5, vers l'extérieur de la colonne

affectée par la hausse de pression. L'accélération associée à cette force de pression engendrera des vents divergents qui enlèveront de la masse dans la colonne. Cette perte de masse se traduira par une chute de pression au sol qui causera une diminution des hausses de pression au-dessus de la couche réchauffée. Conséquemment, des baisses de pression se produiront en-dessous de la couche réchauffée. Ces baisses induiront des nouvelles forces de gradient de pression dirigées vers l'intérieur, comme à la figure 4.5, qui causeront une accélération et des vents convergents. Ces vents convergents ajouteront de la masse dans la colonne, ce qui causera un chute de pression moins grande en surface. Par continuité de la masse, la convergence sous le niveau de réchauffement et la divergence au-dessus induisent un mouvement vertical ascendant qui atteint sa valeur maximale au milieu de la couche réchauffée, au niveau de non-divergence.

Si nous supposons que tous ces phénomènes ont lieu dans une atmosphère neutre, alors le mouvement vertical généré n'affectera pas le champ de température. Cependant si notre atmosphère est stable, le mouvement vertical généré causera un autre effet: celui de refroidir la colonne touchée par le réchauffement. Ce refroidissement, qui s'oppose au réchauffement, entraînera une réduction des épaisseurs des couches affectées par le réchauffement. Les hausses et les baisses de pression seront réduites, ainsi que la divergence au-dessus et la convergence en dessous du niveau réchauffé. Finalement le mouvement vertical sera également réduit suite au refroidissement de la colonne.

Aussi, la force de Coriolis agira sur les vents divergents créant une tendance négative de tourbillon géostrophique, c'est-à-dire du tourbillon anticyclonique, au-dessus du niveau de réchauffement. Cette force agira également sous le niveau de réchauffement où les vents convergents circuleront de façon cyclonique. Nous savons que tous ces processus ont lieu très rapidement et que l'atmosphère tend rapidement vers un état balancé.

En résumé, un réchauffement diabatique localisé dans le centre de la troposphère entraînera un mouvement vertical ascendant qui atteindra sa valeur maximale au milieu de la couche réchauffée. Ce réchauffement créera du tourbillon anticyclonique au-dessus et du tourbillon cyclonique sous le niveau du réchauffement. Ces phénomènes seront amortis lorsque l'atmosphère deviendra plus stable. Bref, toutes ces conséquences proviennent de la distribution verticale du réchauffement local, concentré au milieu de la troposphère.