

Développement de l'équation d'oméga généralisée (i.e. avec comme seule hypothèse : l'approximation hydrostatique)

- a) En calculant le rotationnel de l'équation du mouvement en coordonné de pression, puis en conservant uniquement la composante verticale

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -f\mathbf{k} \times \mathbf{V} - \nabla_p \Phi - \mathbf{F} \right) \quad (1)$$

on obtient alors l'équation du tourbillon:

$$-(f + \zeta) \nabla \cdot \mathbf{V} - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (f + \zeta) - \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \quad (2)$$

- b) En effectuant la dérivé de l'équation du tourbillon par rapport à p, on trouve :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial p} [(f + \zeta) \nabla \cdot \mathbf{V}] - \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \omega \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{V} \cdot \nabla (f + \zeta)] - \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (3)$$

- c) En utilisant l'équation de continuité $\nabla \cdot \mathbf{V} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$ et en décomposant le tourbillon en

ses composantes géostrophique ($\zeta_g = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi$) et agéostrophique on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \left[(f + \zeta) \frac{\partial \omega}{\partial p} \right] - \frac{\partial \omega}{\partial p} \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \omega \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) \\ & = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{V} \cdot \nabla (f + \zeta)] - \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta_{ag}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

- d) On développe le premier terme de gauche ce qui fait s'annuler 2 termes. L'équation devient alors:

$$\begin{aligned} & (f + \zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \omega \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) \\ & = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial p}) + \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{V} \cdot \nabla (f + \zeta)] - \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta_{ag}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

- e) Avec l'approximation hydrostatique $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$ et la loi des gaz parfaits $\rho = \frac{p}{RT}$, on peut exprimer le terme premier terme de droite par :

$$\begin{aligned} & (f + \zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \omega \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) \\ &= -\frac{R}{pf} (\nabla^2 \frac{\partial T}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{V} \cdot \nabla (f + \zeta)] - \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta_{ag}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

- f) On utilise l'équation thermodynamique $\frac{\partial T}{\partial t} = S\omega - \mathbf{V} \cdot \nabla T + \frac{\dot{q}}{c_p}$ pour faire disparaître la tendance de température du premier terme de droite :

$$\begin{aligned} & \frac{R}{pf} \nabla^2 S\omega + (f + \zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \omega \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2} - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) \\ &= -\frac{R}{pf} \nabla^2 (-\mathbf{V} \cdot \nabla T) - \frac{R}{pf} \nabla^2 \frac{\dot{q}}{c_p} + \frac{\partial}{\partial p} [\mathbf{V} \cdot \nabla (f + \zeta)] \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta_{ag}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

- g) Finalement, on multiplie par f et on change le signe (devant et à l'intérieur) du terme de l'advection de tourbillon pour être consistant avec le terme de l'advection de température :

$$\begin{aligned} & \frac{R}{p} \nabla^2 S\omega + f(f + \zeta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - f\omega \frac{\partial^2 \zeta}{\partial p^2} - f \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) \\ &= -\frac{R}{p} \nabla^2 (-\mathbf{V} \cdot \nabla T) - \frac{R}{p} \nabla^2 \frac{\dot{q}}{C_p} - f \frac{\partial}{\partial p} [-\mathbf{V} \cdot \nabla (f + \zeta)] \\ & \quad - f \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}) + f \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \zeta_{ag}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (8)$$