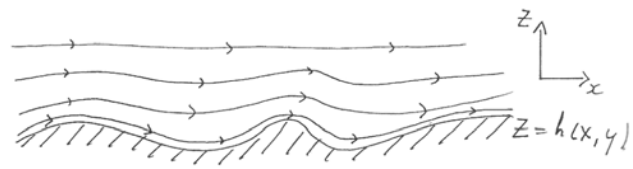
Equations de Saint-Venant (équations shallow-water)

SCA-4011 (2011)

Rappel: équations gouvernant la propagation d'ondes à la surface d'un fluide



- **Equations de base pour un fluide de densité constante ρ_0 :**
  - L'équation d'Euler $\qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\overrightarrow{\nabla p} - g\mathbf{k} \qquad (1)$
  - L'équation de continuité $\qquad \nabla\bullet\mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2)$

Conditions frontières

Condition-frontière en $z = h(x,y,t) = H_0 + h'(x,y,t)$

Interface est une quantité matérielle telle que

$$F(x,y,z,t) = z - h(x,y,t) = cte$$

et conséquemment,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h'}{\partial t} + u\frac{\partial h'}{\partial x} + v\frac{\partial h'}{\partial x}$$

Condition-frontière en z = 0 (frontière rigide):

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{n} \equiv \mathbf{v}\bullet\mathbf{k} = w = 0$$

Equations hydrostatique et de continuité

- **Composante verticale de l'équation d'Euler (1):**

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g$$

  - Equation hydrostatique

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\left(\nabla_H\bullet\mathbf{v}_h\right)$$

Intègre selon z sur toute la colonne de fluide

$$\int_0^{z=H_0+h'} \frac{\partial w}{\partial z}dz = -\int_0^{z=H_0+h'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dz$$

$$\frac{dh'}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(H_0 + h'\right) \qquad (3)$$

en utilisant les conditions aux frontières et le fait que u et v ne dépendent pas de z.

Lien entre la pression et la hauteur h'(x,y,t)

- **Equation hydrostatique est intégrée verticalement**

$$\int_{p_s(x,y,t)}^{p=p_{atm.}} dp = -\rho_0 g \int_0^{H_0+h'(x,y,t)} dz$$

$$p_{atm.} - p_s(x,y,t) = -\rho_0 g\left(H_0 + h'(x,y,t)\right)$$

$$p(x,y,t) = p_{atm.} + \rho_0 g H_0 + \rho_0 g h'(x,y,t)$$

$$p(x,y,t) = Const. + \rho_0 g h'(x,y,t)$$

- Cas 1D: on omet la dépendance selon x et conséquemment que $v = 0$
- Linéarisation:

$$u(x,t) = U_0 + u'(x,t)$$

$$h(x,t) = H_0 + h'(x,t)$$

Equations 1D non linéarisées et linéarisées

- **Composante u de l'équation d'Euler:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$

- **Equation de continuité (3):**

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = -h\frac{\partial u}{\partial x}$$

- **Equations linéarisées sont obtenues en introduisant** $u(x,t) = U_0 + u'(x,t) \;\; ; \;\; h(x,t) = H_0 + h'(x,t)$ **dans ces équations et en négligeant les termes avec produits de perturbations**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U_0\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} + U_0\frac{\partial h}{\partial x} = -H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Etat de base au repos: $U_0 = 0$.

Conservation de la masse

- **La masse totale de fluide est conservée**
  - * Equation de continuité non linéarisée peut être réécrite comme étant: $\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)h = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0$
- **Masse totale est** $M = \rho_0 \int_0^L h(x,t)\,dx$

Conséquemment,

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial t} = \rho_0 \int_0^L \frac{\partial h}{\partial t} dx = -\rho_0 \int \frac{\partial}{\partial x}(uh) = -\rho_0\left[u(L,t)h(L,t) - u(0,t)h(0,t)\right] = 0}$$

Il y a annulation si le domaine est périodique ou s'il y a des frontières rigides aux extrémités pour lesquelles les condition aux frontières imposent que u(0) = u(L) = 0.

Conservation de l'énergie

- **Energie cinétique totale d'une colonne de fluide:**

$$K = \frac{1}{2}\rho_0 h u^2$$

- **Energie potentielle gravitationnelle d'un élément de fluide de hauteur dz placé à une hauteur z étant**

$$dP = \rho_0 g z dz$$

L'énergie potentielle totale est donc $P(x,t) = \rho_0 \int_0^{h(x,t)} gzdz = \frac{1}{2}\rho_0 g h^2$

Variation de l'énergie totale E = K +P est telle que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(K + P) = \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$= \frac{\rho_0}{2}\left[2uh\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial h}{\partial t}\right] + \frac{\rho_0}{2}\left[2gh\frac{\partial h}{\partial t}\right]$$

Conservation de l'énergie

- En utilisant les équations 1D non linéarisées, on a que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + gh\right) \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uh)$$

- Conséquemment,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\rho_0}{2}\left[2uh\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\frac{\partial h}{\partial t}\right] + \frac{\rho_0}{2}\left[2gh\frac{\partial h}{\partial t}\right]$$

$$= -\frac{\rho_0}{2}\left[uh\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + 2gh\right) + \left(u^2 + 2gh\right)\frac{\partial}{\partial x}(uh)\right]$$

$$= -\frac{\rho_0}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(uh)\left(u^2 + 2gh\right)\right]$$

et on conclut donc que $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L E dx = -\frac{\rho_0}{2}\left[(uh)\left(u^2 + 2gh\right)\right]_0^L = 0}$

Résumé

- Les équations du mouvement décrivant la dynamique des ondes de gravité à la surface d'un fluide ont été établies pour le cas 1D
- Ces équations conservent la masse totale M du fluide par l'équation de continuité de même que l'énergie totale E
- Dans la résolution numérique du problème, il n'est pas assuré que ces quantités soient conservées
  - Ces pertes de masse ou d'énergie peuvent parfois être catastrophiques.

Résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles

- Equations linéarisées lors que $U_0 = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

- Méthode spectrale peut être utilisée:

$$u(x,t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} \tilde{u}_n(0)e^{ik(x-ct)} \qquad h(x,t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} \tilde{h}_n(0)e^{ik(x-ct)}$$

- Ce qui conduit au système d'équations suivant:

$$ik\begin{pmatrix} -c & g \\ H_0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}_n(0) \\ \tilde{h}_n(0) \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_\pm = \pm\sqrt{gH_0}$$

Solution comprend deux ondes se propageant en directions opposées

- Aux deux valeurs propres sont associés les vecteurs propres

$$\mathbf{v}_\pm = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{g/H_0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conséquemment la solution est telle que

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ h(x,t) \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} +\sqrt{g/H_0} \\ 1 \end{pmatrix}e^{ik\left(x-\sqrt{gH_0}t\right)} + A_2\begin{pmatrix} -\sqrt{g/H_0} \\ 1 \end{pmatrix}e^{ik\left(x+\sqrt{gH_0}t\right)}$$

- A_1 et A_2 étant obtenus des conditions initiales

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\left(u_0 + h_0\sqrt{H_0/g}\right) \qquad A_2 = \tfrac{1}{2}\left(u_0 - h_0\sqrt{H_0/g}\right)$$

- **Remarque**: pour des conditions initiales arbitraires $u_0(x)$ et $h_0(x)$, il faut poser $u_0(x) = \pm h_0(x)\sqrt{H_0/g}$ pour que l'onde se propage dans une seule direction

Résolution par la méthode spectrale: cas linéaire périodique

- **Système linéarisé peut être écrit comme**

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = +\begin{pmatrix} 0 & -g \\ -H_0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}$$

- **Application du schéma du saute-mouton**

$$\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_{t-\Delta t} + 2\Delta t\begin{pmatrix} 0 & -g \\ -H_0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_t$$

Résolution par la méthode spectrale: cas linéaire avec frontières rigides

- **Conditions frontières: u(0,t) = u(L,t) = 0.**

$$u(0,t) = \sum_{n=-N}^{n=+N} \tilde{u}_n(t) = \tilde{u}_0(t) + \sum_{n=1}^{N}\left(\tilde{u}_n(t) + \tilde{u}_{-n}(t)\right)$$

$$= \tilde{u}_0(t) + \sum_{n=1}^{N} 2A_n(t) \equiv 0$$

car $\tilde{u}_n(t) = A_n + iB_n$. Conséquemment, A_n = 0 pour tout n. On montre alors que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Equation linéarisée pour h étant

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

alors $$h(x,t) = \sum_{n=1}^{N} h_n(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Résolution par la méthode spectrale: cas non linéaire périodique

- **Système peut être écrit sous la forme**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(gh + \frac{u^2}{2}\right) \equiv F_u(x,t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = -h\frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(hu) \equiv F_h(x,t)$$

- **Application du schéma du saute-mouton**

$$\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_{t-\Delta t} + 2\Delta t\begin{pmatrix} F_u \\ F_h \end{pmatrix}_t$$

- **Cette approche peut être adaptée aux différents schémas de résolution de systèmes d'équations différentielles**

Schémas aux différences finies

- **Différences centrées et schéma du saute-mouton**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t} = -g\frac{h(x+\Delta x) - h(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H\frac{du}{\partial x} \Rightarrow \frac{h(t+\Delta t) - h(t-\Delta t)}{2\Delta t} = -H\frac{u(x+\Delta x) - u(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Conditions initiales:

$u(x,0) = 0$

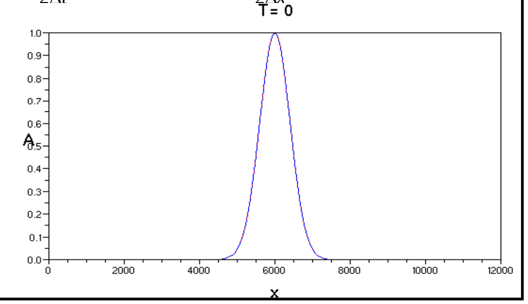
$h(x,0) = h_0 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2L_c^2}\right)$

g = 10 ms^{-2}

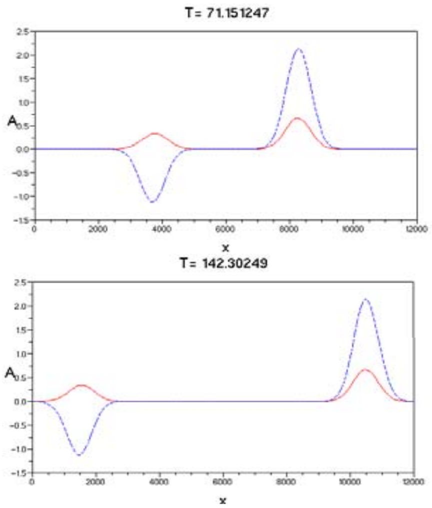
H= 100m

h(x,t) en bleu

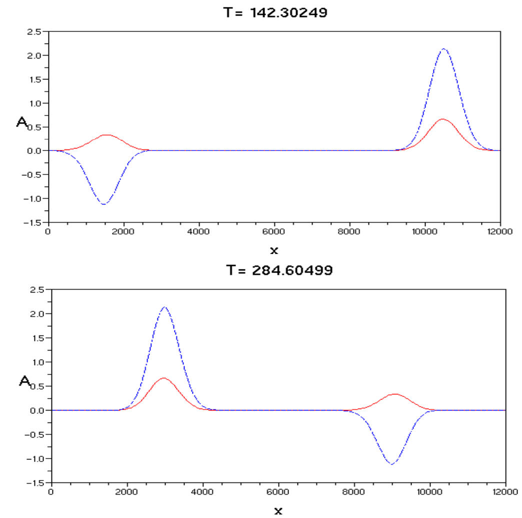
u(x,t) en rouge



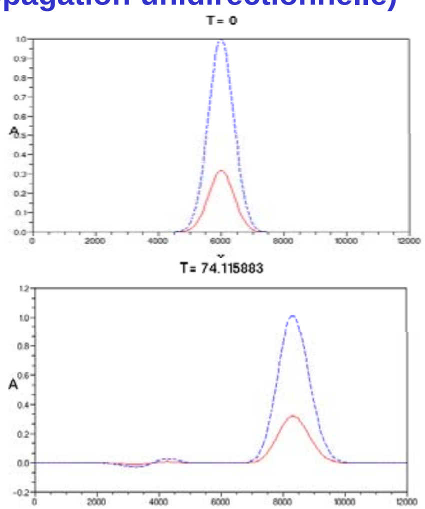
Intégration du cas périodique en différences finies



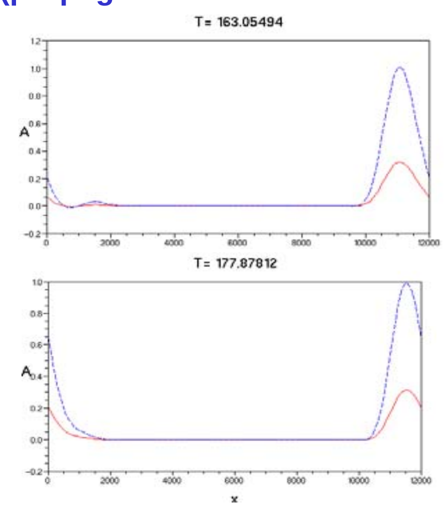
Intégration du cas périodique en différences finies



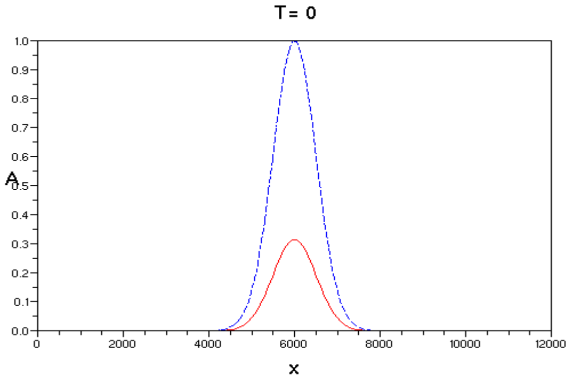
Intégration du cas périodique en différences finies (propagation unidirectionnelle)



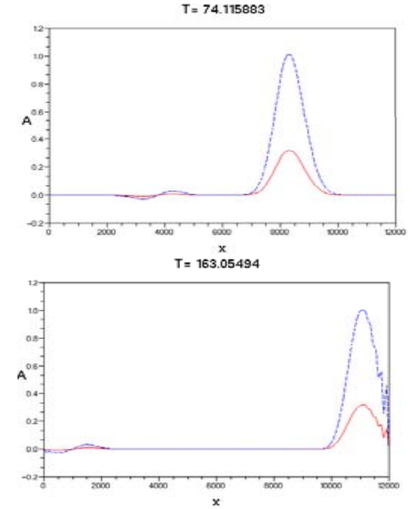
Intégration du cas périodique en différences finies (propagation unidirectionnelle)



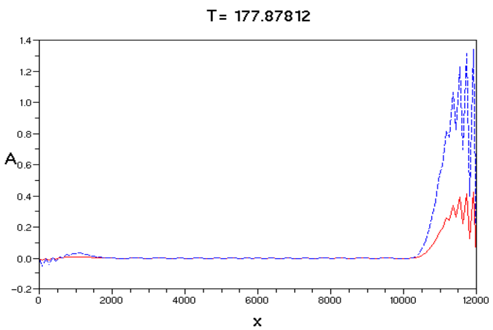
Intégration du cas avec frontières rigides en différences finies



Intégration du cas avec frontières rigides en différences finies



Intégration du cas avec frontières rigides en différences finies



Propagation en présence d'une topographie

- En présence d'une topographie $z=h_c(x)$, l'équation de continuité donne alors que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- Condition-frontière en $z = h_c(x)$:

$$\int_{z=h_c(x)}^{z=H_0+h'} \frac{\partial w}{\partial z} dz = -\int_{0}^{z=H_0+h'} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dz$$

$$\frac{dh'}{dt} - \frac{dh_c}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(H_0 + h') \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -h\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h_c}{\partial x}$$

- Equations linéarisées:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad u_{t+\Delta t}^{x} = u_{t-\Delta t}^{x} - \frac{g\Delta t}{\Delta x}\left(h_t^{x+\Delta x} - h_t^{x-\Delta x}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left((H-h_c)u\right) \quad \Rightarrow \quad h_{t+\Delta t}^{x} = h_{t-\Delta t}^{x} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\left[(H-h_c)u\right]_t^{x+\Delta x} - \left[(H-h_c)u\right]_t^{x-\Delta x}\right)}$$

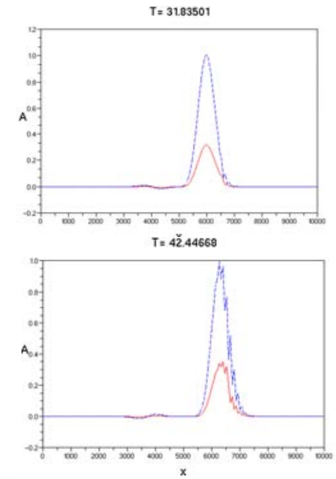
Intégration avec topographie

- **Mur de hauteur h_0 = 50 m localisé en x = 6500 m**

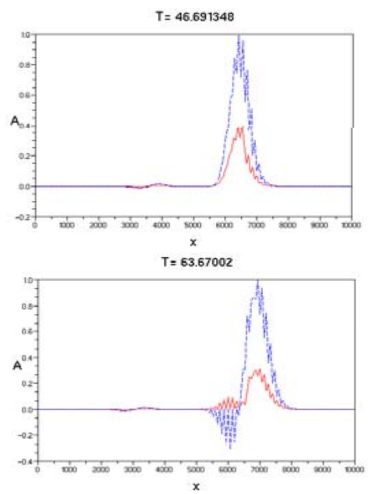
$$h_c(x) = \begin{cases} h_0 & en\ x = 6500 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- **H_0 = 100m**

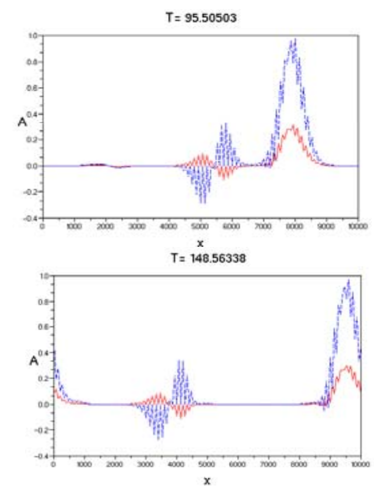
Intégration avec topographie en x = 6500



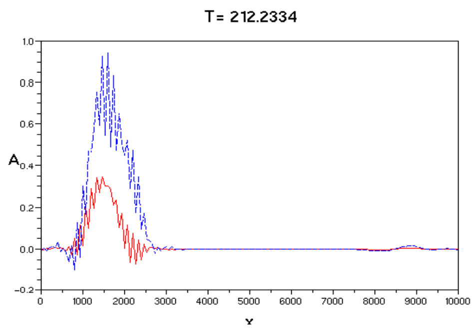
Intégration avec topographie en x = 6500



Intégration avec topographie en x = 6500

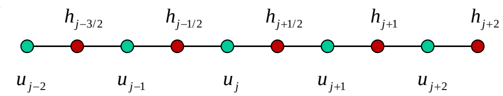


Intégration avec topographie en x = 6500

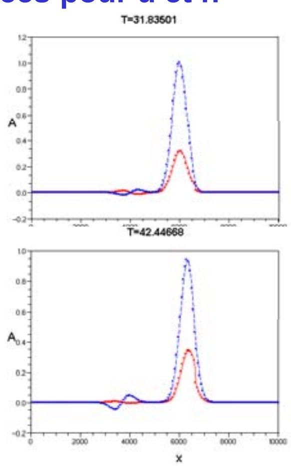


Grilles décalées (*staggered grids*)

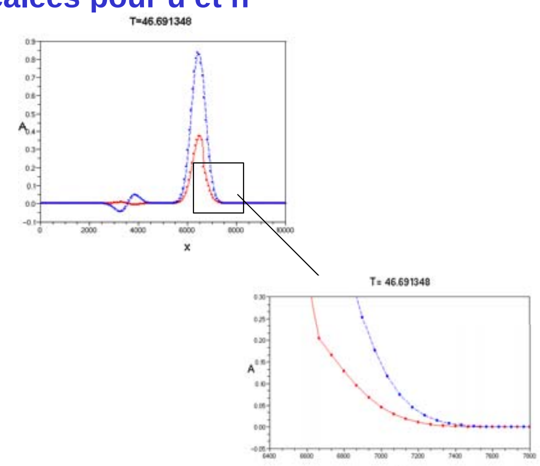
- **Problème peut être éliminé en utilisant des grilles différentes pour u(x,t) et h(x,t) en décalant x de Δx/2**



Intégration avec un mur fixe en utilisant des grilles décalées pour u et h



Intégration avec un mur fixe en utilisant des grilles décalées pour u et h



Intégration avec un mur fixe en utilisant des grilles décalées pour u et h