

Devoir 2**À remettre le 14 février à 9h**

Message importante : Dans tous les devoirs (celui-ci compris) et examens, une réponse sans les bonnes unités aura une pénalité de 100% de la note attribuée à la question.

Rappelons rapidement nos règles de résolution de problèmes:

1. *Identifier* les variables pertinentes au problème et *assigner* des *symboles* pour représenter ces variables. Déterminer également les *dimensions physiques* de chaque variable.
2. *Résoudre* en premier le problème donné *symboliquement*, sans tenir compte des *valeurs* des variables. C'est-à-dire, exprimer la réponse du problème mathématiquement avec les symboles représentant vos variables connues (et peut-être toute nouvelle variable que vous choisissiez de définir).
3. *Vérifier* si votre solution est cohérente dimensionnellement – c'est-à-dire, que les dimensions du côté droit sont les mêmes que celles du côté gauche. Si elles ne sont pas cohérentes, vous pouvez être *certain* d'avoir fait une erreur!
4. *Convertir* les valeurs numériques de toutes les variables données en un *ensemble cohérent d'unités*. Ce sera normalement le SI. Ainsi, toute variable dont les dimensions incluent une longueur (par exemple) devrait avoir cette longueur exprimée en mètres.
5. Après – et *seulement* après – substituez les valeurs numériques plus haut dans votre solution symbolique et faites les calculs avec votre calculatrice. Il n'est pas nécessaire de jouer avec les unités à ce point, car si toutes les variables étaient en unités cohérentes lorsqu'elles ont été entrées dans la calculatrice, alors les résultats numériques qui apparaissent dans votre calculatrice *doivent* être dans le même ensemble d'unités.
6. Si requis, vous pouvez maintenant convertir la réponse dans les unités demandées dans le problème. Que vous ayez à le faire ou non, ***assurez-vous que les unités de votre réponse finale soient clairement données. À moins que la quantité que vous avez trouvée soit sans dimensions, une valeur numérique sans unités est aussi utile qu'un livre sans mots.***
7. *Persuadez-vous* que le résultat numérique que vous avez trouvé a du sens! Par exemple, si vous calculez qu'une gouttelette de pluie a un rayon de 10 mètres dans la réponse d'un certain problème de devoir, vous devez reconnaître immédiatement qu'il y a quelque chose qui ne va pas, soit avec le problème lui-même, ou avec votre solution. Vérifiez également le *signe* de votre résultat et regardez si cela correspond avec vos attentes – probablement la majorité des erreurs de calcul que je vois impliquent des erreurs de signe.

Exercice 2.1

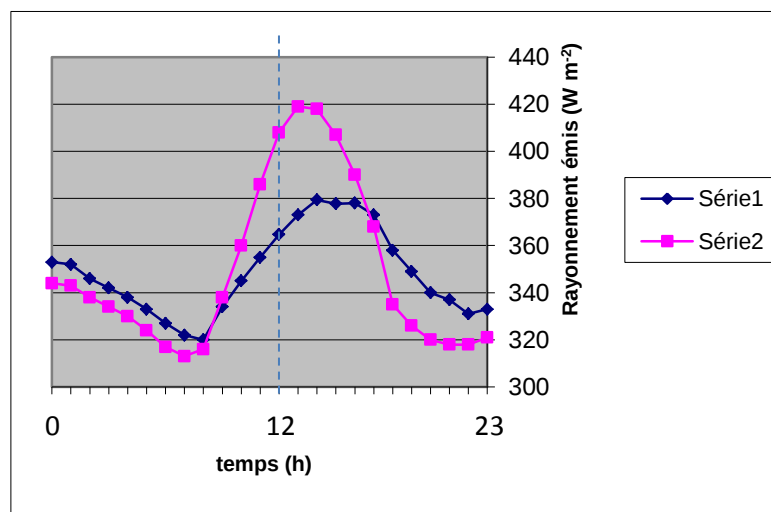
Supposez que la surface terrestre émet du rayonnement comme un corps noir. Supposez aussi que la température de la surface est égale à la température de l'air juste au-dessus de la surface.

- a. Utilisez le tableau 2.1 et la loi de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$) pour calculer l'irradiance à chaque heure dans une des stations du programme ARM (The Atmospheric radiation Measurement), proche de Cyril, OK (sud-ouest d'Oklahoma) le 2 février 1999. Complétez le tableau 2.1.

On utilise la loi de Stefan-Boltzmann pour répondre à cette question en supposant que la température de la surface est égale à la température de l'air, T_a .

$$F = \sigma \cdot T_a^4$$

- b. Faites un graphique de l'irradiance calculée et mesurée en fonction du temps.



Série 1 : irradiance calculée ; série 2 : irradiance mesurée

- c. Comment change l'irradiance pendant le jour? Voir tableau (données en rouge)
- d. À quelle heure est-elle minimum? Calculée : 8h; mesurée : 7h (voir le tableau ou le graphique)
- e. À quelle heure est-elle maximum? Calculée : 14h (entre 14 et 16 h, la température à 2 m est pratiquement constante, donc le maximum de radiation calculé est dans cet intervalle de temps); mesurée : 13h
- f. Analysez les différences entre l'irradiance calculée et l'irradiance mesurée.
Réponse : La température de l'air est différente de la température de la surface. On note le décalage des maximum et minimum de température entre la surface et le niveau de mesure de la température. L'irradiance mesurée est inférieure à l'irradiance calculée pendant la nuit. La tendance s'inverse pendant le jour. Les différences sont maximales à 13h.
- g. Laquelle des deux hypothèses sur la surface doit sûrement être mise en cause? Justifiez votre réponse.
Réponse : la deuxième hypothèse doit être mise en cause puisque l'irradiance

calculée en supposant que la température de la surface est égale à la température de l'air est différente de l'irradiance mesurée. On voit que pendant le jour, l'irradiance mesurée est supérieure à celle calculée, ce qui signifie que la surface a une température plus élevée que l'air à 2 mètres. Pendant la nuit, la surface est plus froide que l'air à 2 mètres puisque l'irradiance calculée est supérieure à celle mesurée.

Il se peut aussi que la première hypothèse (corps noir) soit fausse aussi, mais le comportement de l'irradiance en fonction du temps ne permet pas de le savoir...

Tableau 2.1 : Valeurs horaires de la température et de l'irradiance émise par la surface dans la station du programme ARM proche de Cyril, Oklahoma, le 2 février 1999.

Temps (h CST)	Température de l'air (°C)	Irradiance calculée (Wm ⁻²)	Irradiance mesurée (Wm ⁻²)
0	7,9	353	344
1	7,6	352	343
2	6,4	346	338
3	5,7	342	334
4	4,9	338	330
5	3,9	333	324
6	2,6	327	317
7	1,5	322	313
8	1,1	320	316
9	4,0	334	338
10	6,3	345	360
11	8,3	355	386
12	10,2	365	408
13	11,8	373	419
14	13	379	418
15	12,7	378	407
16	12,7	378	390
17	11,9	373	368
18	8,8	358	335
19	7,0	349	326
20	5,3	340	320
21	4,7	337	318
22	3,5	331	318
23	3,8	333	321

CST : Central Standard Time

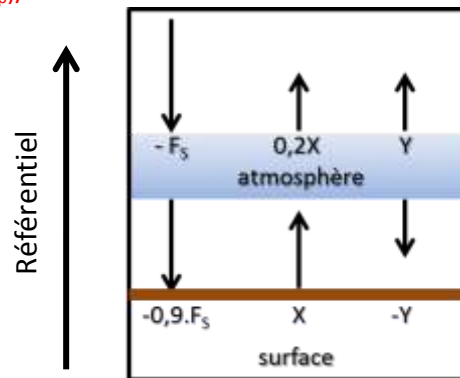
ARM : www.arm.gov

Exercice 2.2

Calculez la température d'équilibre radiatif de la surface terrestre et de son atmosphère en supposant que l'atmosphère se comporte comme une couche mince dont le coefficient d'absorption du rayonnement solaire est $a_{sw} = 0,1$ et celui du rayonnement infrarouge terrestre est $a_{lw} = 0,8$. Supposez que l'albédo planétaire α_p est égal à 0,30 et que la surface terrestre émet du rayonnement comme un corps noir dans toutes les longueurs d'onde.

Solution :

Soit X le rayonnement émis par la surface terrestre; Y , l'irradiance émise par l'atmosphère (vers le haut et vers le bas); et F_s , l'irradiance solaire nette absorbée par le système Terre-atmosphère : $F_s = S(1-\alpha_p)/4 = 239 \text{ W m}^{-2}$.



À l'équilibre radiatif, le bilan d'énergie doit être nul pour chacune des surfaces considérées :

À la surface terrestre : $-0,9 F_s + X - Y = 0$

Au sommet de l'atmosphère : $-F_s + 0,2X + Y = 0$

La solution de ces deux équations est $X = 1,58 F_s$ et $Y = 0,69 F_s$.

Ainsi, à la surface, considérée comme un corps noir,

$$\sigma \cdot T_s^4 = 1,58 \cdot F_s \Rightarrow T_s = \left(\frac{1,58 \cdot F_s}{\sigma} \right)^{1/4} = 286 \text{ K}$$

On connaît le ε_{lw} de l'atmosphère puisqu'on connaît l'absorbance dans l'infrarouge lointain, $a_{lw} = 0,8$. La loi de Kirchhoff nous permet de conclure que $\varepsilon_{lw} = 0,8$, puisqu'aux températures terrestres, l'émission se fait dans l'IR lointain (LW). Donc, au sommet de l'atmosphère, considérée comme un corps gris dans l'intervalle de l'infrarouge lointain, émissivité = absorbance = a_{lw} :

$$\varepsilon_{lw} \cdot \sigma \cdot T_a^4 = 0,68 \cdot F_s \Rightarrow T_a = \left(\frac{0,68 \cdot F_s}{\varepsilon_{lw} \cdot \sigma} \right)^{1/4} = 245 \text{ K}$$

Dans une atmosphère modélisée comme une couche d'air isotherme, absorbant différemment le rayonnement solaire et le rayonnement terrestre, la température de la surface serait de 286 K, et la température de l'air, 245 K. Puisque $a_{lw} > a_{sw}$, on est en présence d'un effet de serre. La température de la surface dans la planète avec cette atmosphère $T_s = 286 \text{ K}$, est supérieure à la température de la surface de la planète sans atmosphère $T_s = T_E = 255 \text{ K}$.

Exercice 2.3 : Considérez un échantillon d'air humide à la température de 30°C et à la pression de 1020 hPa. Son humidité spécifique est $q_i = 20 \text{ g/kg}$.

- a) Déterminez pour cet échantillon :
 1. la pression partielle de la vapeur d'eau;
 2. le rapport de mélange;
 3. la température virtuelle en Kelvin et en Celsius;
 4. la densité de l'air humide;
 5. l'humidité relative.
- b) Comparez la densité de l'air humide avec celle de l'air sec à la même pression et température.
- c) Quelle est la température du point de rosée de cet échantillon?
- d) Si on refroidit l'air à pression constante jusqu'à la température de 15°C, y aura-t-il formation de brouillard?
- e) Déterminez la masse d'eau condensée par kilogramme d'air sec avant et après le refroidissement.

Solutions :

- a) Données : air humide; $p_i = 1020 \text{ hPa}$; $T_i = 30 \text{ °C}$; $q_i = 20 \text{ kg}$

1. Demande : $e_i = ? \text{ [Pa]}$

Nous connaissons l'humidité spécifique $q_i = 20 \text{ g/kg}$ et la relation entre celle-ci et

la pression partielle de la vapeur d'eau e : $q = \varepsilon \cdot \frac{e}{p - (1 - \varepsilon)e}$. Nous connaissons

aussi la pression initiale $p_i = 1020 \text{ hPa}$. Il nous suffit d'exprimer la pression partielle en fonction de la pression totale et de l'humidité spécifique :

$$q = \varepsilon \cdot \frac{e}{p - (1 - \varepsilon) \cdot e} \Rightarrow p \cdot q - e \cdot q + \varepsilon \cdot e \cdot q = \varepsilon \cdot e$$

$$\varepsilon \cdot e + (1 - \varepsilon) \cdot q \cdot e = p \cdot q$$

$$e = \frac{p \cdot q}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \cdot q}$$

Application numérique :

$$e = \frac{1020 \cdot 10^2 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0,622 + (1 - 0,622) \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 3240 \text{ Pa}$$

2. Demande : $r_i = ? \text{ [g/kg]}$

La relation entre le rapport de mélange et l'humidité spécifique permet la détermination du rapport de mélange :

$$r = \frac{q}{1 - q}$$

Application numérique :

$$r = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{1 - 20 \cdot 10^{-3}} = 0,0204 = 20,4 \text{ g / kg}$$

3. $T_{vi} = ? \text{ [K]} = ? \text{ [°C]}$

Par définition de température virtuelle : $T_v = (1 + 0,61q) \cdot T$

Application numérique :

$$T_v = (1 + 0,61 \cdot 20 \cdot 10^{-3}) \cdot (273,15 + 30)$$

$$T_v = 306,8 \text{ K} = 33,7 \text{ °C}$$

4. Demande : $\rho = ? \text{ kg/m}^3$

L'équation d'état de l'air humide (en fonction de la température virtuelle) nous permet de calculer la densité de l'air humide :

$$p = \rho \cdot R_d \cdot T_v$$

$$\rho = \frac{p}{R_d \cdot T_v}$$

Application numérique :

$$\rho = \frac{1020 \cdot 10^2}{287 \cdot 306,8} = 1,16 \text{ kg / m}^3$$

5. HR = ? %

Par définition : $HR = 100 \cdot \frac{e}{e_w(T)}$; Nous connaissons e et T. En connaissant T, on

connait $e_w(T)$, qui ne dépend que de la température. Les tables nous donnent

$$e_w(T) = 42,427 \text{ hPa}$$

Application numérique :

$$HR = 100 \cdot \frac{3240}{4242,7} = 76 \%$$

b) Demande $\rho_d = ? \text{ kg/m}^3$, à $p = 1020 \text{ hPa}$ et $T = 30^\circ\text{C}$. L'air sec est un gaz parfait :

$$p = \rho_d \cdot R_d \cdot T$$

$$\rho_d = \frac{p}{R_d \cdot T}$$

Application numérique :

$$\rho_d = \frac{102000}{287 \cdot 303} = 1,17 \text{ kg / m}^3$$

On voit que l'air sec, à la même pression et température que l'air humide, est plus dense que celui-ci.

c) Demande : $T_d = ? (^\circ\text{C})$

La température du point de rosée est donnée par la valeur de e et est telle que

$$e = e_w(T_d)$$

Cherchons dans les tables de vapeur saturante la température pour laquelle cette égalité est vérifiée : La température se situe entre 25°C et 26°C

$$e_w(25^\circ\text{C}) = 31,668 \text{ hPa} < e_w(T_d) = 32,40 \text{ hPa} < e_w(26^\circ\text{C}) = 33,6064 \text{ hPa}$$

On peut dire que $T_d = 25,5^\circ\text{C}$.

d) Si on refroidit l'air jusqu'à la température de 15°C , il y aura formation de brouillard puisque la température du point de rosée initiale est supérieure à cette température.

- e) Avant le refroidissement, la quantité d'eau liquide est nulle; après, elle sera égale à la différence entre le rapport de mélange initial et le rapport de mélange final.

$$r_l = r_i - r_f$$

Nous avons déterminé le rapport de mélange initial. Il nous faut calculer le rapport de mélange final. Puisque la température finale est inférieure à la température du point de rosée initiale, l'air est saturé à la température de 15°C (température finale). Cette information nous permet de connaître $e_w(15^\circ\text{C}) = 17,042 \text{ hPa}$ (tables), ce qui nous

permet le calcul de r_f : $r_f = \varepsilon \cdot \frac{e_f}{p - e_f} = 0,622 \cdot \frac{17,42}{1020 - 17,42} = 0,0108 = 10,8 \text{ g / kg}$

Application numérique : $r_l = r_i - r_f = 20,4 - 10,8 = 9,6 \text{ g / kg}$ d'eau liquide.

Bibliographie

Monteiro, E, 2018 : Notes de cours SCA2626

Crawford et al., 2006 : Explorations in Meteorology : A Lab Manual.