Résolution de problèmes physiques: une introduction
Par : Grant W. Petty
Traducteur : Luis Duarte

Les devoirs qui demandent de résoudre des problèmes physiques sont un outil d'enseignement essentiel pour tout cours de physique de niveau supérieur. Si vous êtes comme la plupart des étudiants entrant dans un cours de physique atmosphérique au niveau du bac, vous n'avez eu jusqu'à maintenant que peu d'occasions d'*appliquer* les concepts et techniques provenant de la physique et du calcul différentiel et intégral à des problèmes courants comme ceux qu'on peut trouver en météorologie.

Il est facile de perdre de vue l'étendue des habiletés acquises qui doivent être utilisées dans la solution de n'importe quel problème. Si vous avez des faiblesses dans une ou plusieurs de ces habiletés, alors tout le processus s'avérera ardu – un exercice davantage frustrant qu'instructif.

J'ai découvert qu'en plus, beaucoup d'étudiants à ce niveau ne sont pas encore habitués à travailler *symboliquement* avec des quantités physiques, plutôt que numériquement. Et malheureusement, beaucoup d'étudiants (y compris l'auteur) réussissent à passer à travers leurs cours de premier cycle sans développer une réelle appréciation de la force de la *cohérence dimensionnelle* comme outil pour construire et corriger des solutions.

Le but de cette annexe est de servir de brève introduction à la manière dont les scientifiques expérimentés et les ingénieurs s'attaquent à des problèmes physiques. Je soulignerai des stratégies spécifiques qu'il serait bien d'adopter comme habitudes non seulement pour les problèmes présents dans ce cours, mais aussi à l'avenir, dans votre travail. Mon insistance sur la résolution symbolique plutôt que numérique en est un bon exemple: mon but n'est pas de vous rendre la vie difficile, mais plutôt de la *faciliter* à long terme! Vous ferez moins d'erreurs “stupides”, vous vous servirez moins de votre calculatrice, votre raisonnement sera plus clair et – peut-être le plus important, du mois à ce stade-ci – il sera plus facile à votre professeur de voir ce qui est *correct* dans les solutions utilisées dans vos devoirs et vos examens! La seule chose “difficile” dans la résolution symbolique est que vous avez fait les choses autrement pendant beaucoup plus longtemps.

Avant d'examiner les mécanismes faisant partie des calculs physiques, commençons par réviser tout le processus de résolution d'un problème qui pourrait se retrouver dans un devoir ou un examen.

B.1 Cinq étapes pour la réussite

La solution de tout problème de devoir ou d'examen, peu importe les détails du problème, implique (ou devrait impliquer) invariablement les étapes suivantes, la première de celles-ci ayant idéalement été complétée avant même de voir le problème:

1. Connaissance – apprendre les faits et la théorie pertinents.
2. Analyse – appliquer des faits familiers à un problème qui ne l'est pas.
3. Exécution – les mécanismes pour élaborer et vérifier la solution.
4. Validation – se convaincre que votre solution est correcte.
5. Compréhension – tirer les leçons appropriées de l'exercice.

Si vous avez de la difficulté avec ne serait-ce qu'une des trois premières, alors vos chances d'obtenir une solution seront plutôt incertaines. Si vous ne vous préoccupez pas de la quatrième, alors vous ne saurez si votre réponse était correcte ou non que quand on vous rendra votre devoir ou votre examen.

Enfin, si vous ne passez pas par la cinquième étape, alors l'effort sera perdu du moins en partie, même si votre solution était correcte.

Révisons donc chacune de ces étapes, une à la fois.

B.1.1 Acquérir les connaissances pertinentes

Le but premier des présentations de votre professeur et de vos manuels est de vous inculquer de la *connaissance* sur la matière de votre cours. La connaissance inclut (entre autres choses) des *faits observés* (exemple, la composition de l'atmosphère) et des *principes fondamentaux* (exemple, la loi des gaz parfaits). Les problèmes sont habituellement conçus pour vous permettre de pratiquer *l'application* de la connaissance que vous aves acquise et, dans certains cas, d'approfondir votre connaissance sur “comment les choses fonctionnent”.

Ce n'est pas suffisant de juste mémoriser un vaste ensemble de faits; il faut également comprendre comment ils sont interconnectés. Par exemple, connaître la composition de l'atmosphère est essentiel pour calculer la constante des gaz appropriée dans la loi des gaz parfaits. Connaître les mouvements caractéristiques dans l'atmosphère est ce qui justifie l'utilisation de la relation hydrostatique.

Vous devez donc faire attention, autant dans vos cours que dans vos lectures, non seulement aux faits qui vous sont présentés mais aussi au *contexte* dans lequel ils sont présentés:

– *Pourquoi* le professeur ou l'auteur dit quelque chose en particulier? Est-ce juste de la connaissance pour la connaissance, ou est-ce une brique importante dans un mur plus grand?
– *Quelle situation ou processus* est décrit par une équation particulière? Connaître une équation par cœur ne vaut rien si vous ne savez pas à quoi elle sert.
– *Quelles suppositions* ont été faites pour obtenir une équation particulière? Même si l'équation semble décrire quelque chose dont vous avez besoin, comme le rapport entre pression et altitude, elle vaut moins que rien si elle repose sur des suppositions qui ne s'appliquent pas à votre problème spécifique.

Répondre activement à *toutes* les questions ci-dessus est une partie importante de l'acte d'*étudier*. Si vous lisez passivement votre manuel comme si c'était une simple récitation de faits déconnectés, vous ne serez pas préparé à *appliquer* correctement vos connaissances. Le même avertissement s'applique si vous commencez par lire un problème de votre devoir pour après plonger dans votre manuel à la recherche du fait important ou de la formule clé nécessaire à sa résolution.

B.1.2 Analyser le problème

La prochaine étape est de tracer un chemin complet et continu de la connaissance à votre disposition à la solution désirée. Typiquement, votre travail sera de choisir, dans votre ensemble de faits, des liens solides qui peuvent être assemblés en une chaîne continue et logique menant de vos acquis à votre solution. S'il y a un lien qui manque, alors la chaîne est incomplète et donc inutile – il faudra en tenir compte et voir s'il n'y a pas un autre morceau d'information que vous avez oublié. Parfois, cette information manquante n'est pas une formule ou un fait mais plutôt une supposition raisonnable, parfois appelée “bon sens”. *Ne sous-estimez pas la force du bon sens à vous aider à trouver un chemin à travers un vaste fouillis de faits et d'équations qui semblent être liées superficiellement à votre problème!*

Si une étape du processus vous mène dans un cul-de-sac, il faudra le reconnaître, et revenir en arrière. Ne faites pas des “sauts” sans fondement de ce cul-de-sac à votre solution en espérant que le correcteur ne s'en rendra pas compte!

Aussi, il y a souvent à la fois des chemins courts et des chemins longs menant à n'importe quelle destination. Quand on roule de Los Angeles à San Diego, il est théoriquement possible (et pas incorrect, techniquement) de faire un détour par New York, mais je ne le vous recommande pas! Plus vous saisissez complètement “l'image d'ensemble”, plus vous avez de chances d'identifier le chemin le plus court et le plus simple. Selon mon expérience personnelle, il arrive souvent aux étudiants de ne pas voir un chemin rapide et facile et s'engager dans un chemin long et compliqué qui mène à une réponse identique, mais avec un investissement plus grand et des risques de panne plus importants.

Peu importe le chemin emprunté, vous devez vous assurer qu'il est complet et valide. Chaque étape doit être logiquement correcte et vous rapprocher de votre destination de manière démontrable. Il est parfois utile d'écrire (ne serait-ce que pour votre bénéfice personnel) ce que chaque étape de la solution accomplit pour vous – ce que vous saviez au début, ce que vous savez maintenant, et comment cela vous rapproche de la solution désirée? Si vous êtes incapable de répondre à ces questions (la dernière tout particulièrement), alors vous n'êtes pas en train de *résoudre*, vous êtes en train de *tâtonner*!

Un test clé de la validité de votre chemin est qu'il respecte le prérequis de cohérence dimensionnelle. Les calculs physiques impliquent inévitablement non seulement des nombres, mais aussi des dimensions physiques comme la longueur, la masse, le temps, etc. Il y a des règles strictes concernant les opérations mathématiques sur des dimensions physiques, et ces règles peuvent être des outils puissants pour mettre en évidence des erreurs de logique. Le sujet des dimensions physiques est couvert plus en détail dans la section B.3.2. Je vous recommande de la réviser attentivement.

En résumé, vous devriez *planifier votre solution* en répondant aux questions suivantes:

1. Quelle information vous est donnée comme partie du problème?
2. Que vous demande-t-on de déterminer ou de calculer?
3. Quels faits observés ou suppositions raisonnables pourraient vraisemblablement s'appliquer?
4. Quels principes fondamentaux ou relations pourraient s'appliquer?
5. Et le plus important, comment les faits, suppositions et relations à votre disposition permettent d'aller logiquement des informations qui vous sont données (1.) à la solution désirée (2.)?

B.1.3 Exécuter la solution

Une fois que vous avez élaboré votre stratégie pour résoudre le problème, il est temps de l'implémenter. Il vous fault :

1. Choisir des symboles appropriés pour représenter chaque quantité pertinente.
2. Spécifier des valeurs (avec unités) pour ces quantités, si applicable.
3. Manipuler les symboles algébriquement pour obtenir la solution à votre problème, exprimée *symboliquement* en termes de vos données.
4. Vérifier la *cohérence dimensionnelle* de votre solution.
5. Calculer une *solution numérique* d'après les valeurs spécifiées des variables données.

Toutes les étapes décrites plus haut sont évidentes et peuvent devenir naturelles pour n'importe quel étudiant suffisamment motivé, peu importe leurs talents innés pour la science. La maîtrise est acquise moins par l'*étude* que par la pratique. La plupart d'entre vous, en fait, *connaissez* déjà les opérations; c'est la *répétition* qui les rendra automatiques. Il y a, par contre, tellement plus à dire sur plusieurs de ces étapes que j'ai écrit une section entière (B.3) uniquement à cette fin.

B.1.4 Valider votre résultat

Vous êtes arrivé à une réponse et l'avez notée sur votre feuille de devoir. Les dimensions correspondent – le problème demandait un rayon et votre réponse est en unités de longueur.

À ce stade-ci, beaucoup d'étudiants considèrent leur travail terminé, déposent leur crayon, retournent leur feuille, et, possiblement, se croisent les doigts. Mais il n'est pas nécessaire de laisser tout au hasard. Vous pouvez réduire les chances de remettre des inepties, et possiblement ne recevoir aucun point pour votre dur travail, en prenant quelques minutes supplémentaires pour vérifier si votre réponse a du sens. Voici quelques exemples :

- Si votre réponse constitue en une relation mathématique, quelles sont les variables qui y apparaissent? Est-ce les variables auxquelles vous vous attendiez, selon votre compréhension du problème? La relation est-elle ce à quoi vous vous attendiez – par exemple, si x augmente, $y(x)$ devrait-il augmenter ou diminuer, selon votre compréhension du rôle de x?
- Quand vous remplacez les variables de la relation par des valeurs raisonnables, le résultat peut-il être positif, négatif, ou zéro? Le signe que vous obtenez est-il celui auquel vous vous attendiez?
- Quelle magnitude, ou étendue de magnitudes, attendez-vous que votre quantité atteigne, dans des situations typiques? La magnitude de votre résultat est-elle cohérente avec l'étendue prévue? Si la quantité est un vecteur, la direction est-elle raisonnable?
- Y a-t-il un cas spécial ou une limite pour laquelle vous *savez* quelle devrait être la réponse (exactement ou approximativement), et est-ce que votre solution donne cette réponse?

B.1.5 Comprendre votre résultat

Beaucoup de problèmes ne sont pas conçus simplement pour tester vos connaissances ou exercer une habileté particulière, mais aussi pour faire valoir un argument particulier. Quel est le rôle de la condensation et de la précipitation dans l'occurrence des vents chinook? Quelle est, réellement, l'importance des variations de température dans les changements de pression avec l'altitude?

Il s'ensuit que si vous vous contentez d'écrire la solution à votre problème, convaincre vous-même qu'elle à l'air d'être correcte mathématiquement et numériquement, et après vous vous en éloignez (mentalement), vous réduisez la valeur de votre éducation météorologique. Votre connaissance de la matière mûrira plus rapidement si vous vous habituez à prendre un peu de temps supplémentaire pour réfléchir aux questions suivantes:

1. Quels principes généraux sont démontrés par le problème?
2. À quels paramètres du problème le résultat est-il le plus sensible? Examinez cette question non seulement en termes mathématiques, mais aussi en gardant en tête l'étendue probable des valeurs trouvées réellement dans l'atmosphère. Par exemple, l'accélération gravitationnelle g et la température T peuvent apparaître toutes les deux dans une relation particulière. Même si les deux peuvent varier, il est probable que T à la surface de la Terre variera beaucoup plus que g, et donc aura une influence plus importante dans les variations de votre résultat.
3. Existe-t-il des valeurs pour les paramètres du problème pour lesquelles votre solution “casse”, soit mathématiquement (exemple, division par zéro), ou parce qu'une supposition importante dans son élaboration ne sera probablement pas respectée (exemple, $x << 1$)? Ces valeurs pourraient-elles se produire dans l'atmosphère de la Terre? Sur une autre planète?
4. Outre le scénario spécifique décrit dans le problème, pouvez-vous imaginer d'autres scénarios réels pour lesquels les méthodes et/ou les principes généraux du problème pourraient s'appliquer?

B.2 Élaboration des solutions – habitudes à *oublier*

B.2.1 Recette pour un désastre

Le meilleur moyen de faire valoir l'importance de développer une approche disciplinée et mature pour résoudre vos problèmes est de démontrer les défauts évidents de l'approche alternative. Ce qui suit résume assez bien ce que je vois dans les devoirs remis par les nouveaux étudiants de mes cours de premier cycle:

1. Utiliser les valeurs numériques des variables données dans le problème pour calculer une valeur intermédiaire. Écrire cette valeur avec de 1 à 10 chiffres significatifs.
2. Ne pas tenir compte des unités et supposer que “ça finira par marcher”. Ou, si la conversion des unités est requise et est, en fait, exécutée explicitement, donner celles-ci sous la forme de longues et encombrantes chaînes de multiplications et divisions qui font rappeler les cours de chimie à l'école secondaire.
3. Utiliser les valeurs intermédiaires obtenues plus haut pour calculer une autre valeur intermédiaire. Le nombre de chiffres significatifs (i.e., précision) peut n'avoir rien à voir avec la précision retenue pour les résultats des étapes précédentes.
4. Répéter les étapes plus haut jusqu'à avoir une valeur numérique pouvant être utilisée comme solution au problème.
5. Convertir aux unités désirées. Ou non! Ou ne pas se donner la peine d'indiquer quelles sont les unités de la réponse.

Il est bien possible, si vous êtes raisonnablement prudent, d'obtenir la bonne réponse à un problème avec la procédure décrite plus haut. Néanmoins, cette approche *improvisée et orientée numériquement* aux calculs physiques est à la fois inefficace et sujette aux erreurs. Regardons un peu quelques uns des écueils:

- Chaque fois que vous calculez et notez une valeur numérique intermédiaire, vous arrondissez nécessairement le résultat. Selon l'arrondissement que vous faites, l'incertitude introduite à chaque fois peut s'accumuler et donner des erreurs importantes dans votre réponse finale.
- Repérer des erreurs de calcul ou de logique peut devenir presqu'impossible quand vous ou le correcteur examine la masse de nombres et de conversions griffonnées sur votre page. De plus, la probabilité d'une erreur de calcul (par exemple, oublier un chiffre ou appuyer sur le mauvais bouton) augmente chaque fois que vous prenez votre calculatrice.
- Beaucoup d'effort est souvent utilisé pour convertir les unités à mesure que vous passez à travers les étapes. Beaucoup de cet effort est gaspillé, et accroît la probabilité d'erreurs.
- Elle obscurcit les relations physiques générales qui gouvernent la variable que vous cherchez à résoudre. Est-ce que la variable x augmente ou diminue quand la variable y augmente? Est-ce que la variable y importe même? Si votre approche est strictement numérique, vous pourriez ne pas vous rendre compte que y s'annule et n'entre même pas dans la solution.
- Si vous devez répéter le calcul pour un ensemble différent de valeurs pour le même problème, vous devrez répéter toute la procédure du début, et encore une fois vous perdrez du temps et augmentez la probabilité de commettre des erreurs.
- Il est difficile pour un enseignant de donner quelques points pour un problème résolu de la manière décrite plus haut si la réponse finale s'avère numériquement incorrecte car il peut être impossible de déterminer si l'erreur est conceptuelle (l'étudiant ne savait pas ce qu'il faisait) ou juste une erreur de calcul (l'étudiant a oublié un signe quelque part).

B.2.2 Un mauvais exemple

Problème : estimez la masse totale de l'atmosphère terrestre (en kg) M_{TOT}, en utilisant les informations suivantes : accélération de la gravité g = 32,17 ft/s^2 ; rayon de la Terre R_E = 3960 miles ; pression moyenne au niveau de la mer p_0 = 1013,2 millibars. Conversions : 1 m = 3,28 ft ; 1 mile = 1609,756 m.

$$\frac{1013{,}2\ \text{mb} \times 100\ \text{Pa/mb} \times \frac{\text{N/m}^2}{\text{Pa}} \times \frac{\text{kg m/sec}^2}{\text{N}}}{32{,}17\ \text{ft/sec} \times 1\ \text{m}/3.28\ \text{ft}} =$$

$$= 10330.41965$$

$$4\pi(3960)^2\ \text{miles} = 197060797.4\ \text{miles} \times \frac{1609{,}756\ \text{m}}{\text{miles}} \times 10330.41965$$

$$= 3.277013666 \times 10^{+15} \leftarrow$$ RÉPONSE (masse de l'atmosphère

Cette solution n'est pas seulement laide. Quelqu'un autre que l'auteur passera un mauvais quart d'heure en essayant de suivre le raisonnement. Malgré cela, le raisonnement est correct et la chaîne de calculs numériques est *presque* correcte. Mais la valeur numérique obtenue est incorrecte à cause d'une erreur de calcul… Serait vous capable de trouver l'erreur ?

Problème B.1 :
a) Noter l'heure avant de commencer cet exercice ;
b) Trouver l'erreur de calcul dans la solution ci-dessus ;
c) Enregistrer le temps totale qui vous avez perdu à la recherche de l'erreur ;
d) Multiplier ce temps par 5 (nombre moyen de problèmes dans chaque devoir) et par le nombre d'étudiants du cours (25). Exprimer votre résultat en heures.

B.3 Élaboration des solutions – habitudes à *prendre*

Regardons maintenant comment entreprendre des calculs physiques et élaborer des solutions à la manière d'un professionnel. Les idées de base peuvent être résumées comme suit:

- On commence notre solution avec une manipulation *abstraite* des quantités physiques, avec comme but de trouver une solution *symbolique*. Le calcul d'une solution *numérique* suivra à l'étape finale.
- On prend soin de s'assurer de la cohérence à la fois *dimensionnelle* et *mathématique* à chaque étape.
- On fait preuve de discipline dans l'utilisation des *chiffres significatifs*, sans réduire la précision de façon inutile ni en déclarant une valeur plus précise qu'elle ne le devrait être.
- On écrit la solution d'une manière logique et séquentielle, en s'assurant que le lecteur peut facilement voir quelle démarche on utilise, même si les détails ne sont pas élaborés. Nous n'avons pas besoin d'inclure toutes les étapes d'une intégration, par exemple, tant que le début et la fin sont clairs et que l'algèbre intermédiaire est évidente.

La dernière de ces idées se passe d'explications, donc on se concentrera sur les trois premières.

B.3.1 Solutions symboliques

D'abord et avant tout, nous voulons nous tenir loin des *nombres* aussi longtemps que possible et plutôt analyser notre problème en termes de *variables* (ou *paramètres*). Les *nombres* ont une signification qui est liée à une instance spécifique du problème. Les *variables* ont une signification qui ne dépend pas d'un cas spécifique. Si la physique est la même, alors l'algèbre utilisée dans le calcul de la masse de l'atmosphère de Mars est la même que pour celle de la Terre. Seules les *valeurs* des paramètres R_E, g et p_0 changent. Il est donc logique de résoudre le problème dans sa forme générale avant d'y substituer des valeurs spécifiques.

Ceci est fait en utilisant des *symboles* (c'est souvent, mais pas nécessairement toujours, des lettres de l'alphabet romain ou grec, avec parfois des indices, des exposants ou d'autres ornements) pour représenter tous les paramètres physiques, de même que toute constante physique ou mathématique. La solution à votre problème est obtenue par la suite en manipulant algébriquement les symboles choisis jusqu'à trouver une expression *indépendante* (ou un petit ensemble d'expressions connexes) représentant la quantité recherchée.

Il y a quatre raisons principales qui font que les solutions symboliques, quand elles sont possibles, sont préférables aux solutions strictement numériques:

1. *Elles transmettent une idée physique*. Vous pouvez voir d'un coup d'œil quelles variables sont importantes (ou même présentes) et comment elles sont liées à la quantité désirée.
2. Vous pouvez vérifier rapidement la *cohérence dimensionnelle*, qui est essentielle à toute solution valide physiquement (voir Section B.3.2), sans avoir à passer à travers une masse de conversions numériques.
3. *Elles sont faciles à valider et à corriger*. Un enseignant qui voit votre suite de calculs numériques ne peut pas discerner immédiatement si votre chemin mène au résultat désiré (particulièrement s'il y a une erreur cachée quelque part). Une solution symbolique correcte, d'autre part, aura plus ou moins la même apparence pour tout le monde. Si quelque chose ne va pas, il sera habituellement très facile de voir c'est quoi.

4. *Elles sont réutilisables.* Si on vous demande de résoudre le même problème pour plusieurs ensembles différents de conditions, vous n'aurez pas à refaire la solution complète pour chaque cas; vous n'aurez qu'à placer les nouvelles valeurs dans votre solution symbolique et à faire travailler votre calculatrice. Vous pouvez même coder les expressions en tant que routines Fortran, Matlab, IDL ou C++, de sorte que vous n'aurez même pas à sortir votre calculatrice. Et dans ce dernier cas, produire les données nécessaires pour tracer un graphe de la sortie en fonction d'une ou plusieurs des entrées devient une affaire toute simple!

B.3.2 Cohérence dimensionnelle

Il est impossible de trop insister sur l'importance, dans la résolution de problèmes physiques, de posséder des notions sur les dimensions. Vous *ne pouvez pas* ajouter une longueur à une masse. Vous *ne pouvez pas* prendre le cosinus ou l'exponentielle d'un temps, ou de toute autre quantité exprimée en dimensions physiques. Toute solution qui ne respecte pas ces préceptes (ou d'autres similaires) *ne peut possiblement être correcte!* Plusieurs des erreurs que je retrouve dans les solutions de devoirs auraient pu être facilement identifiées, et présument corrigées, par l'élève s'il avait tout simplement vérifié la cohérence dimensionnelle. Cette section est un bref résumé des règles pertinentes.

Dans toute équation valide, les dimensions physiques des deux côtés *doivent* être les mêmes. Par exemple, si *A* dans l'équation

$$A = B \cdot C$$

est en dimensions de pression, alors B.C doit être en dimensions de pression. Si

$$A = B + C\ ,$$

alors *A*, *B*, et *C* doivent être exprimés dans les mêmes dimensions. Si

$$A = B\exp(C) \equiv Be^{C} \text{ ou } A = B\ln C$$

alors dans chaque cas, *B* est exprimé dans les mêmes dimensions que *A*, et *C* est *sans dimensions*. Il s'ensuit que chaque fois que vous avez des expressions de la forme

$$A = \exp(C) \equiv Be^{C} \text{ ou } A = \ln C$$

A doit être sans dimensions.

Les dimensions de dérivées et d'intégrales sont assez évidentes. Les dimensions de

$$\frac{df(x)}{dx}$$

sont les dimensions de *f(x)* divisées par les dimensions de *x*. De même, les dimensions de

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

sont les dimensions de *f(x)* multipliées par les dimensions de *x*.

Fait important: Vérifier soigneusement la cohérence des dimensions dans vos calculs réduit grandement les risques d'erreurs. S'ils ne sont pas conformes aux règles citées plus haut, alors vos calculs sont erronés, point à la ligne!
L'envers de ce principe est qu'examiner les dimensions des variables données dans un problème vous donnera souvent un indice sur la manière de les combiner afin d'obtenir une expression de la quantité qui nous intéresse.

Exceptions apparentes

Occasionnellement, on pourrait vous présenter une formule qui *semble* nécessiter un assouplissement de ces règles. Par exemple, prenez l'équation de la réflectivité du radar $Z = AR^b$, où Z et R sont tous les deux en unités météorologiques spécifiques (mm^6/m^3 et mm/hr, respectivement). Si b n'est pas un entier, alors il devient malaisé d'affirmer quoi que ce soit de significatif sur les dimensions du coefficient A. La situation s'aggrave quand on prend les logarithmes des deux côtés pour obtenir une expression comme celle-ci:

$$\ln Z = \ln A + b \ln R ,$$

auquel cas Z, A et R ne peuvent avoir de dimensions (i.e., ils doivent être des nombres “purs”)! La façon de contourner ce paradoxe est de voir Z et R non comme des quantités avec des dimensions mais plutôt comme des *rapports* sans dimensions exprimant la magnitude du facteur de réflectivité du radar et du taux de précipitation liquide *relativement à leurs unités standards respectives*.

Dimensions vs. unités

Si additionner une longueur à une masse n'a aucun sens physique, ce n'est certainement pas le cas si on additionne un pouce à un mille. En d'autres termes, le prérequis de cohérence *dimensionnelle* n'implique pas nécessairement que toutes vos variables doivent être spécifiées en utilisant le même système d'*unités*. Par exemple, il est tout à fait acceptable de poser ceci:

$$1 \text{ pouce} + 1 \text{ mille} = ?$$

Pour trouver la somme, vous devez bien sûr choisir une unité de longueur unique pour représenter votre réponse, et vous devrez alors exprimer les deux longueurs du côté gauche en utilisant cette unité. Toutes les solutions suivantes sont valides:

$$\begin{aligned}
&1{,}57\overline{82}\times10^{-5}\text{ mile}+1\text{ mile}=1{,}0000157\overline{82}\text{ mile}\\
&1\text{ pouce}+63360\text{ pouce}=63361\text{ pouce}\\
&0{,}0254\text{ m}+1609{,}344\text{ m}=1609{,}3694\text{ m}
\end{aligned}$$

Bien sûr, on a supposé ci-haut qu'on parlait d'ajouter *exactement* un pouce à *exactement* un mille. Après avoir lu la section sur les chiffres significatifs, vous comprendrez que si “1 mille” est pris comme une quantité *mesurée* avec un seul chiffre significatif comme précision, alors

1 pouce + 1 mille = 1 mille !

B.3.3 Cohérence mathématique

Très souvent en physique atmosphérique, on rencontre des équations différentielles de premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$$

En mots, cette équation nous dit ce qui suit : Étant données des valeurs spécifiques de *x* et *y*, une variation infinitésimale *dx* de *x* produira une variation infinitésimale *dy* de *y*; de plus, le *rapport* de la variation *dy* sur la variation *dx* (i.e., le côté gauche) est donné par la fonction *f(x,y)*. Dans un vrai problème, la fonction *f(x,y)* serait connue, et votre travail serait de trouver la fonction *y(x)* – ou peut-être *x(y)* – qui satisfait l'équation.

La méthode standard de résolution est d'essayer de séparer les variables comme suit:

$$g\left(x\right)dx = h\left(y\right)dy$$

où

$$f\left(x, y\right) \equiv \frac{g\left(x\right)}{h\left(y\right)}$$

Des quantités comme *dx, dy et* $d\varphi$ sont appelées, en calcul différentiel et intégral, *différentielles*. Il est essentiel de comprendre qu'elles représentent des variations *infinitésimales* (i.e., microscopiques) arbitraires des quantités ... Elles n'ont aucune valeur spécifique en soi et n'ont de sens que lorsque comparées avec d'autres différentielles.

De plus, une quantité différentielle multipliée par n'importe quoi est toujours une différentielle. Les côtés gauche et droit au complet de (B.3.3) sont donc des différentielles en soi. Si on veut, on peut leur donner de nouveaux noms, comme

$$dU \equiv g\left(x\right)dx,\ dV \equiv h\left(y\right)dy$$

En météorologie, les changements microscopiques ne nous intéressent pas normalement, sauf en tant que point de départ de notre analyse; nous voulons voir ce qui arrive en réponse à une variation *macroscopique* (finie) d'une variable. Le processus par lequel on passe de changements infinitésimaux à des changements finis se fait par *intégration*. En fait, l'intégration peut être vue comme l'action d'additionner les résultats d'une suite infinie d'étapes infiniment petites.

Pour l'équation différentielle séparée donnée plus haut, nous voulons normalement intégrer les deux côtés entre un état initial *a* et un état final *b*:

$$\int_{x(a)}^{x(b)} g(x)\,dx = \int_{y(a)}^{y(b)} h(y)\,dy$$

En étant chanceux, on sera capables de trouver des expressions fermées pour les deux côtés qui ne comportent pas d'intégrales.

La procédure plus haut est simple et devrait vous devenir très familière d'ici la fin de ce cours. Entre-temps, vous devriez faire très attention aux règles essentielles suivantes:

1. La *seule* manière valide d'aller du différentiel au macroscopique est d'intégrer. Si une différentielle quelconque disparaît mystérieusement sans l'utilisation d'une intégration clairement indiquée, il y a quelque chose qui ne va pas!
2. Si vous intégrez un côté d'une équation, vous *devez* intégrer l'autre côté également. Vous ne devriez jamais, *jamais* finir avec une égalité entre une quantité différentielle d'un côté et une quantité finie de l'autre.
3. Lors de la résolution de problèmes physiques, les limites inférieure et supérieure de vos intégrales seront *toujours* explicites (i.e., pas d'intégrales indéfinies). Ces limites représentent les points initial et final du processus physique évalué. Si vous n'incluez pas les limites d'intégration, alors votre solution n'est pas mathématiquement correcte et complète.
4. Les limites inférieures des intégrales de chaque côté de l'équation *doivent* être cohérentes entre elles. Par exemple, si l'intégrale du côté droit de l'équation se fait sur le temps t, et la limite inférieure de l'intégration est $t = 0$, alors la limite inférieure de l'intégrale sur (disons) y du côté gauche doit représenter la valeur de y evaluée au temps $t = 0$. Ceci tient également pour les limites supérieures.
5. Lors de l'intégration sur une variable particulière (par exemple, t), toutes les variables (par exemple, y) du même côté de l'équation dont la valeur varie avec t doit être *à l'intérieur* de l'intégrale. Ceci est vrai même si y n'est pas encore exprimée en tant que fonction explicite de t. Dans ce cas, il vous faut trouver un moyen de l'exprimer en tant que fonction de t afin de pouvoir évaluer l'intégrale de façon appropriée. Si vous n'y arrivez pas, alors évaluez au moins la possibilité que y devrait plus naturellement se trouver à l'intérieur de l'intégrale de l'autre côté de l'équation.

B.3.4 Précision numérique

Valeurs exactes vs. valeurs mesurées

En science, on distingue les valeurs exactes des valeurs mesurées (ou estimées). Les valeurs exactes comprennent des quantités calculées théoriquement, comme π ou le rapport 4/3, qui apparaissent toutes les deux dans la formule du volume d'une sphère. Aussi, une valeur *supposée* (non mesurée) d'une variable physique peut également être traitée comme exacte, dans le sens qu'on peut dire “Prenez un ballon qui s'élève au niveau 500 hPa...” sans avoir à se demander si cela signifie 500.00000 hPa ou plutôt 500.00001 hPa.

Les valeurs mesurées, de leur côté, sont par nature approximatives. Quand on lit un baromètre anéroïde, on peut être assez certains d'avoir une lecture qui est correcte au hPa le plus proche. Avec de la pratique, on peut aller une étape plus loin et *estimer* au dixième de hPa le plus proche. Mais on ne peut dire rien du tout sur la valeur correcte à la position des centièmes. Notre mesure, comme toutes les mesures, a donc une *précision* finie.

Mesures de précision

On peut exprimer la précision présumée de n'importe quelle valeur de deux manières: par le *nombre de chiffres significatifs* et/ou par la *décimale la moins significative*.

Chiffre significatif: Dans un nombre, les chiffres significatifs sont tous ceux dont la valeur est connue avec certitude, plus au maximum un dont la valeur n'est connue que de façon approximative (généralement à une ou deux unités près). Ce sont les chiffres qui sont directement reliés à la précision avec laquelle on connaît le nombre.

En vertu de cette définition, les chiffres suivants, qui ne servent qu'à indiquer l'ordre de grandeur (centièmes, dixièmes, milliers, millions, etc.), **ne sont pas significatifs** :

- les zéros situés au début d'un nombre fractionnaire (par exemple les deux zéros de 0,0123);
- les zéros qui apparaissent à la fin d'un nombre entier (par exemple, les trois zéros de 123 000), s'ils n'ont rien à voir avec la précision du nombre;

Par exemple, supposons qu'on a mesuré un terrain avec un galon précis au cm et trouvé que sa longueur est 12,3 m. Ce nombre possède trois chiffres significatifs, car on ne connaît précisément la valeur de la seconde décimale (les mm). Si l'on exprime cette valeur en mm ou en km, le nombre de chiffres significatifs doit rester le même, car la précision avec laquelle on connaît le nombre ne peut changer du seul fait d'un changement d'unités. Ainsi, les nombres exprimant cette valeur avec trois unités différentes, soit :

12,3 m
12 300 mm
0,0123 km

possèdent tous trois chiffres significatifs.

Mais attention : pris isolément, le dernier nombre (12 300) pourrait aussi bien avoir l'air de comporter 5 chiffres significatifs, il pourrait, par exemple, être le résultat d'une mesure effectuée avec une règle précise au mm.

Dans le cas des nombres entiers se terminant par un ou des zéros, c'est le contexte qui indique si ces zéros sont significatifs ou non. Le recours à la notation scientifique est une façon d'éviter toute ambiguïté. La valeur exprimée en mm, par exemple, s'écrirait alors : $12{,}3 \times 10^4$ mm, ce qui indiquerait clairement que le nombre ne contient que trois chiffres significatifs.

Finalement, on peut définir des nombres exacts, qui correspondent à des comptages, comme 4 personnes ou 14 aller et retour, ou qui interviennent dans des expressions mathématiques, comme le nombre 2 dans la relation entre le diamètre et le rayon d'un cercle, $d = 2r$, ou comme 2,54 dans la relation de conversion 2,54 cm = 1 pouce. Ces nombres comportent une infinité de chiffres significatifs.

Décimale la moins significative: la position du chiffre le moins significatif. Les positions sont numérotées à partir de zéro pour la position des unités, et augmentent vers la gauche. Les positions décimales à droite du point décimal sont négatives.

Fait important: Si la décimale la moins significative est plus grande que zéro, alors la notation scientifique doit être utilisée pour empêcher les zéros à droite d'être interprétés comme significatifs.

Exemples :

Exemple	Nombre de chiffres significatifs	Dernière ddécimale significative
1,37	3	-2
54,389	5	-3
1010	4	0
$1{,}01\times10^{3}$	3	1
0,000002	1	-6
$15{,}0\times10^{6}$	3	5

Le nombre de chiffres significatifs vous donne effectivement l'incertitude *relative* (ou fractionnelle) de la valeur. Par exemple, une valeur avec trois chiffres significatifs est censée être connue jusqu'à une part sur 100-1000 (selon la valeur exacte).

La décimale la moins significative, d'autre part, est une mesure de l'incertitude *absolue*. Par exemple, si la décimale la moins significative est -2, alors on croit connaître la valeur approximativement au 0.01 le plus près, peu importe si le nombre à cinq chiffres significatifs (par ex., 529.03) ou seulement un (par ex., 0.05).

Fait important: Quand on *multiplie* ou *divise* deux valeurs, le nombre de chiffres significatifs du résultat est *le plus petit* des nombres significatifs des deux valeurs.

Par exemple, si x a cinq chiffres significatifs et y en a seulement deux, alors les valeurs de xy et de x/y auront toutes les deux chiffres significatifs.

Fait important: Quand on *additionne* ou *soustrait* deux valeurs, la décimale la moins significative du résultat sera *la plus grande* des décimales les moins significatives des deux valeurs.

Par exemple, si x est significatif jusqu'aux dixièmes et y est significatif jusqu'aux millièmes, alors $x + y$ et $x – y$ seront significatifs jusqu'aux dixièmes seulement.

Complétez vos connaissances :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Chiffre_significatif
http://www.ccdmd.qc.ca/ri/chiffres/

B.3.5 Résumé

Rappelons rapidement nos règles de résolution de problèmes:

1. *Identifier* les variables pertinentes au problème et *assigner* des *symboles* pour représenter ces variables. Déterminer également les *dimensions physiques* de chaque variable.
2. *Résoudre* en premier le problème donné *symboliquement*, sans tenir compte des *valeurs* des variables. C'est-à-dire, exprimer la réponse du problème mathématiquement avec les symboles représentant vos variables connues (et peut-être toute nouvelle variable que vous choisissez de définir).
3. *Vérifier* si votre solution est cohérente dimensionnellement – c'est-à-dire, que les dimensions du

côté droit sont les mêmes que celles du côté gauche. Si elles ne sont pas cohérentes, vous pouvez être *certain* d'avoir fait une erreur!

4. *Convertisser* les valeurs numériques de toutes les variables données en un *ensemble cohérent d'unités*. Ce sera normalement le SI. Ainsi, toute variable dont les dimensions incluent une longueur (par exemple) devrait avoir cette longueur exprimée en mètres.
5. Après – et *seulement* après – substituez les valeurs numériques plus haut dans votre solution symbolique et faites les calculs avec votre calculatrice. Il n'est pas nécessaire de jouer avec les unités à ce point, car si toutes les variables étaient en unités cohérentes lorsqu'elles ont été entrées dans la calculatrice, alors les résultats numériques qui apparaissent dans votre calculatrice *doivent* être dans le même ensemble d'unités.
6. Si requis, vous pouvez maintenant convertir la réponse dans les unités demandées dans le problème. Que vous ayez à le faire ou non, *assurez-vous que les unités de votre réponse finale soient clairement données*. À moins que la quantité que vous avez trouvée soit sans dimensions, une valeur numérique sans unités est aussi utile qu'un livre sans mots.
7. *Persuadez-vous* que le résultat numérique que vous avez trouvé a du sens! Par exemple, si vous calculez qu'une gouttelette de pluie a un rayon de 10 mètres dans la réponse d'un certain problème de devoir, vous devez reconnaître immédiatement qu'il y a quelque chose qui ne va pas, soit avec le problème lui-même, ou (plus probablement) avec votre solution. Vérifiez également le *signe* de votre résultat et regardez si cela correspond avec vos attentes – probablement la majorité des erreurs de calcul que je vois impliquent des erreurs de signe.

Il est important de se rendre compte que, dans la procédure plus haut, votre calculatrice n'entre pas du tout en jeu, jusqu'à l'étape 4. Si vous avez a résoudre le même problème une deuxième fois, disons avec un ensemble différent de valeurs pour les variables données, vous n'avez pas à répéter tout le calcul; vous n'avez qu'à revenir à l'étape 4. *L'étape 2 est celle où doit se faire la plupart du travail de réflexion dans la plupart des problèmes de devoir et de test.*

B.3.6 – Un bon exemple

Problème : estimez la masse totale de l'atmosphère terrestre (en kg) M_{TOT}, en utilisant les informations suivantes : accélération de la gravité g = 32,17 ft/s^2 ; rayon de la Terre R_E = 3960 miles ; pression moyenne au niveau de la mer p_0 = 1013,2 millibars. Conversions : 1 m = 3,28 ft ; 1 mile = 1609,756 m.

Raisonnement :

1. pression $p_0 = \dfrac{force}{surface} = \dfrac{masse \times g}{surface} \Rightarrow \dfrac{masse}{surface} = \dfrac{p_0}{g}$

2. masse totale de l'atmosphère $\dfrac{masse}{surface} \times \left[\text{surface de la Terre}\right] = \dfrac{p_0}{g}\left[4\pi R_E^2\right]$

Solution symbolique

$$\boxed{M_{tot} = \frac{p_0 4\pi R_E^2}{g}}$$

Ceci c'est la partie la plus importante de votre solution ! Si la solution symbolique est correcte, la plupart de votre travail est achevé. Cette forme ne dépend pas des données spécifiques du problème ni des unités. Vous pouvez calculer la masse des divers planètes en utilisant la même solution symbolique.

Vérification de l'homogénéité dimensionnelle

L'expression ci-dessus doit avoir les dimensions de masse (kg dans le système SI). Si les dimensions ne sont pas kg, il faut trouver l'erreur !

$$\frac{Pa\ m^2}{m\ s^{-2}} = \frac{N\ s^2}{m} = \frac{kg\left(ms^{-2}\right)s^2}{m} = kg \quad \text{OK}$$

Conversion des unités à un ensemble d'unités cohérent (SI fortement sugéré)

$$g = 32{,}17\frac{ft}{s^2}\frac{1m}{3{,}28\,ft} \Rightarrow g = 9{,}808\ ms^{-2}$$

$$R = 3960mi\,\frac{1609{,}8m}{mi} \Rightarrow R = 6{,}364\times 10^6\,m$$

$$p_0 = 1013{,}2mb\,\frac{100Pa}{mb} \Rightarrow p_0 = 1{,}013\times 10^5\,Pa$$

Solution numérique

$$\boxed{M_{tot} = \frac{\left(1{,}013\times 10^5\right)4\pi\left(6{,}374\times 10^6\right)}{9{,}808} = 5{,}27\times 10^{18}\,kg}$$

À noter :

1. Nous n'avons pas besoin de vérifier les unités dans le calcul final puisque nous avons déjà vérifié que la solution symbolique a des dimensions de masse. Si tous les paramètres sont en unités SI, le résultat sera lui aussi en unités SI.
2. Pour la plupart des solutions de ce cours, la solution sera donnée avec trois à quatre chiffres significatifs. Dans l'exemple nous avons choisit 3 chiffres significatifs.

B.4 Liste de choses à vérifier dans les solutions de devoir

- La partie symbolique d'une solution *doit* prendre la forme d'une formule indépendante, ou d'un petit ensemble de formules.
- Les solutions finales (à la fois symboliques et numériques) devraient être encadrées, afin d'être clairement identifiables lors de l'évaluation.
- Tous les symboles apparaissant dans la (ou les) formule(s) *doivent* représenter soit (a) des paramètres donnés dans le problème original, (b) des quantités définies dans la solution, ou (c) des quantités pour lesquelles une expression symbolique a été fournie dans une partie antérieure du même problème.
- Chaque solution *doit* être cohérente dimensionnellement (voir section B.3.2) pour recevoir ne serait-ce qu'une partie des points.
- Si le début d'une solution implique des intégrales, assurez-vous que toute intégration est montrée explicitement des deux côtés de l'équation, avec des limites appropriées (et cohérentes).
- Aucune *valeur numérique* ne devrait apparaître dans la formule symbolique qui représente des quantités physiques (par opposition à des quantités purement mathématiques). Toute valeur de ce genre devrait être remplacée par un symbole ou combinaison de symboles appropriés.
- Aucune valeur numérique qui est une approximation décimale d'une valeur exacte ne devrait apparaître. Par exemple,π devrait toujours apparaître dans une formule sous cette forme, et *non* sous la forme 3.1416. Même pour les nombres rationnels, il vaut mieux éviter les représentations décimales: utilisez $5x/4y$ plutôt que $1.25x/y$.
- Si un calcul physique implique une température, il est fort possible que celle-ci doive être exprimée en tant que température *absolue*. *Vérifiez* que vous avez converti en Kelvin là où c'est requis. Note : pour des *différences* de température, l'usage de Celsius ou de Kelvin n'a pas d'importance – la *grandeur* d'un degré est la même dans les deux cas.
- Les valeurs numériques requises en tant qu'entrées dans les calculs devraient préserver au moins quatre chiffres significatifs de précision, là où c'est possible – davantage si c'est nécessaire pour satisfaire à l'exigence ci-dessous.
- Si possible, les valeurs numériques finales de votre solution devraient être données avec une précision de trois chiffres significatifs, sauf indication contraire. Par contre, la précision indiquée du résultat ne devrait pas dépasser celle qui serait justifiée par la précision la plus petite des entrées du calcul. Exceptions possibles: les températures devraient normalement être données au dixième de degré près, les pressions devraient être données *au moins* à l'hectopascal près, même si cela signifie avoir quatre chiffres significatifs. Les *différences* de température devraient être calculées au dixième de degré près, ou avec trois chiffres significatifs, selon la précision la plus grande.