TP#1

Déroulement : Explications avec exemples, suivies d'un ou deux exercices d'application : les étudiants peuvent travailler en groupe. Le climat doit être détendu et les étudiants peuvent discuter entre eux et poser des questions. Le but de la pratique est juste d'encourager les étudiants à faire un effort pour comprendre la matière.

Première partie : grandeurs et dimensions physiques

1) **Unités principales du système international (SI)** :
   a. Longueur : mètre (m)
   b. Masse : kilogramme (kg)
   c. Temps : seconde (s)
   d. Température : Kelvin (K)
   e. Quantité de substance : mole (mol)

2) **Échelle de correspondance entre les unités du SI (conversions d'unités)** :

Outre les correspondances entre les unités du SI (préfixes) qui seront exposés au tableau 1.1, certaines autres équivalences sont bonnes à connaître, en voici quelques-unes :

lbs en kg $\rightarrow$ 1 lbs = 0,454 kg = 454 g ou 1 kg = 2,2046 lbs

°F en °C $\rightarrow$ T(en °C) = 5/9 [T (en °F) – 32]

°C en K $\rightarrow$ T (en K) = T (en °C) + 273,15

Tableau 1.1 : Préfixes multiplicatifs du SI

PRÉFIXE	SYMBOLE	VALEUR NUMERIQUE	NOTATION EXPONENTIELLE	EXEMPLE
Méga	M	1 000 000	10^6	1 MHz = 10^6 Hz
kilo	k	1 000	10^3	1 km = 1000 m
hecto	h	100	10^2	1 hL = 100 L
déca	da	10	10^1	1 (da)m^2 = 10 m^2
---	---	1	10^0	---
déci	d	0,1	10^{-1}	1 dL = 100 mL
centi	c	0,01	10^{-2}	1 cm = 0,01 m
milli	m	0,001	10^{-3}	1 mg = 0,001 g
micro	μ	0,000 001	10^{-6}	1μg = 0,001 mg
nano	n	0,000 000 001	10^{-9}	1 nm = 10^{-9} m

Note : *Une observation quantitative est donc la mesure d'une propriété de la matière ; elle est constituée d'une valeur numérique et doit toujours être accompagnée de ses unités. Dans les calculs, on doit indiquer les unités des mesures à chaque étape du calcul. Ceci montre la démarche utilisée et permet également de vérifier que le résultat final a bien les unités attendues. Il serait incorrect d'obtenir des* g^2 */ mL pour une masse volumique, qui doit être en g/mL. Ceci indique qu'une étape du calcul est erronée.*

Pour en savoir plus :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A9fixes_du_syst%C3%A8me_international_d'unit%C3%A9s

3) Propriétés de la matière (unités de mesure) :

Tableau 1.2 : unités de mesure des principales propriétés de la matière

propriété	symbole	définition	unités	exemples
Masse	m	Quantité de matière	kg g*	1 kg = 1000 g 1 g = 1000 mg
Volume	V	Volume	m^3 L* cm^3* mL*	1 m^3 = 1000 L 1 L = 1000 cm^3 1 mL = 1 cm^3
Masse volumique	ρ	Densité = m / V	kg / m^3 g / cm^3	1 g / cm^3 = 1000 kg / m^3
Force	F	Masse x accélération	N (Newton)	1 N = 1 kg m/ s^2
Pression	p	Force qu'exercée par unité de surface	Pa (Pascal) kPa* mb** hPa**	101,325 kPa = 760 mm Hg 1 torr = 1 mm Hg 1 atm = 101,325 kPa 1 mb = 100 Pa
Température	T	Agitation moyenne des molécules d'un corps	K (Kelvin) °C	K= °C + 273,15
Mole	mol	Lot de 6,022 x 10^{23} particules	mol	---
Chaleur spécifique	c_s	Énergie requise pour élever la température d'un corps de masse unitaire de 1 °C	J / kg °C J / g °C *	1 cal = 4,185 J 1 kJ = 1000 J

* unités utilisées par les chimistes ; **unités utilisées par les météorologistes

Deuxième partie : Identités de base (à lire et à consulter)

Logarithmes et puissances

On utilisera souvent les identités qui suivent :

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}; \left(x^a\right)\left(x^b\right) = x^{a+b}; x^a y^a = \left(xy\right)^a; \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{1}$$

Relations qui utilisent les logarithmes naturelles (de base *e*),**ln**, et exponentielles,**exp** :

$$\exp x \equiv e^x$$

$$\begin{aligned}
&\ln 1 = 0; \ln(e) = 1; \ln(e^x) = x \\
&\ln(MN) = \ln(M) + \ln(N) \\
&\ln\left(\frac{M}{N}\right) = \ln(M) - \ln(N) \\
&\ln(M^p) = p\ln(M) \\
&\ln\left(\frac{1}{M}\right) = -\ln(M)
\end{aligned} \tag{2}$$

Conversion entre logarithmes naturels et décimales (log ou base 10).

$$\ln(M) = \log(M)\log(10) \tag{3}$$

Différentiation et intégration

La dérivée de la fonction *f*(*x*), $f'(x)$, est le rapport de la variation infinitésimale *df* de la fonction en réponse à une variation infinitésimale de *dx* de *x*. Mathématiquement ceci correspond à

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Règles de dérivation :

Dérivée d'une constante, *k* : $\frac{d(k)}{dx} = 0$ (5)

La règle de la somme / différence : $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}; \frac{d(u-v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ (6)

La règle du produit : $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ (7)

La règle du quotient : $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{v^2}$ (8)

La règle de la puissance : $\frac{d(x^a)}{dx} = ax^{a-1}$ (9)

La règle en chaîne: $\frac{d(f(u(x)))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du(x)}{dx}$ (10)

Quelques dérivées :

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}; \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(\exp(x \ln a)) = a^x \ln(a) \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax \ \ldots$$

Voir documents dans le site web2.sca.uqam.ca/~eva

Exercice 1

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = xe^x \ln x + x^3 \sin x$

Rep : $f'(x) = e^x \ln x + xe^x \ln x + e^x + 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

Exercice 2

Déterminer la dérivée df/dx, où $f(x) = \sqrt{\cos(\sin^2 x)}$

Rep : $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{-\sin x \cos x \sin(\sin^2 x)}{\sqrt{\cos(\sin^2 x)}}$

L'intégration c'est l'opération inverse de la dérivation :

$$\int du = u + \text{constante} \tag{13}$$

$$\int x^a \mathrm{dx} = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, a \neq -1, \quad \text{où } c \text{ est une constante} \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{x}} dx = \int d(\ln x) = \ln x + c, \quad \text{où } c \text{ est une constante} \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \frac{df}{dx} \ln f + c, \quad \text{où } c \text{ est une constante} \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + c, \quad \text{où } c \text{ est une constante} \tag{18}$$

$$\int e^{ax} \mathrm{dx} = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad \text{où } c \text{ est une constante} \tag{19}$$

Voir documents dans le site web2.sca.uqam.ca/~eva

Exercice 3 :

Déterminer l'intégrale $\int 3x^2 dx$ et l'intégrale définie $\int_{x}^{x_2} 3x^2 dx$

Rep : $\int 3x^2 dx = x^3 + \text{constante}; \int_{x}^{x_2} 3x^2 dx = x_2^3 - x_1^3$

Exercice 4

Déterminer l'intégrale $\int \frac{dx}{x^3}$

Rep : $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + \text{constante}$

Exercice 5

Déterminer l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x+1)}$

Rep : $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x+1)} = \ln\left(\frac{x_2+1}{x_1+1}\right)$

Pour en savoir plus : http : //archives/math.utk.edu/visual.calculus

Troisième partie : Emploi des variables d'un système thermodynamique

Variables d'état et variables associées à un procédé thermodynamique

L'analyse quantitative du d'un système thermodynamique requiert la manipulation de variables qui représentent des caractéristiques physiques de celle-ci. On peut classer ses variables en deux groupes :

1. Celles qui décrivent l'**état** du système à chaque instant : les **variables d'état** sont déterminées uniquement par l'**état** du système. Ces variables nous informent des propriétés du système dans un point et à un instant donnée, mais ne nous renseignent pas sur les processus qui on amené la parcelle à cette état. La connaissance des variables d'état ne nous permettent pas de connaître l'histoire système. Pour un système homogèmne, les variables d'état les plus communes sont la pression, la température, le volume et la densité. En ce qui concerne les variables d'état, l'effet net d'une variable d'un processus peut être caractérisé entièrement par les valeurs initial et final de la variable d'état comme par exemple la température initiale T_0 et finale T_1. La variation des variables est complètement indépendante du procédé. Elle dépend uniquement de l'état initial et de l'état final. Dans le cas de la température $\Delta T = T_1 - T_0$.

2. Les variables associées à un processus thermodynamique, comme l'échange d'énergie entre la parcelle et son environnement. Un bon exemple de variable qui dépend du procédé et qui n'est pas une variable d'état est la quantité de chaleur Q qui a été additionnée à la parcelle d'air pour l'amener à sa nouvelle température T_1. Sans connaître le procédé qui a provoqué le changement d'état du système il nous est impossible de déterminer la quantité de chaleur échangée entre la parcelle et son environnement.

Exercice 6 :

Quelles des variables suivantes sont des variables d'état :
a) Le volume d'une masse d'air délimité par une surface parfaitement extensible;
b) Le volume d'essence consommé par votre automobile entre la maison et l'université;
c) La quantité de chaleur nécessaire pour faire bouillir une masse d'eau initialement à la température de 20°C;
d) La position dans l'espace d'un ballon météorologique;
e) La distance parcourue par le ballon après son lancement.

Différentielles

Quel que soit le type de variable, on commence l'analyse d'un changement d'état d'un système thermodynamique en étudiant comment le changement infinitésimal, ou différentielle, d'une variable dépend du changement des autres variables desquelles elle dépend. Une différentielle est tout simplement une petite variation de la variable en question. Si qui est important c'est d'établir la relation fonctionnelle entre cette petite variation et la variation des autres variables.

Prenons un exemple simple. La vitesse v est définie comme le taux de variation de la position x en fonction du temps, t.

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{1}$$

La dérivée du coté droit de l'équation (1) peut être interprétée comme le rapport entre la différentielle de la position *dx* et la différentielle du temps *dt*. En multipliant les deux côtés de l'équation par *dt* on obtient :

$$vdt = \frac{dx}{dt}dt \Rightarrow dx = vdt \tag{2}$$

L'équation (2) peut être traduite en langage courante comme suit : un petit changement de la position *x* (différentielle de *x*) est donné par la vitesse instantanée *v* fois le petit changement de temps *t* (différentielle de *t*). Ni *dx*, ni *dt* on une valeur «fixe»; il est requis seulement qui ces variations soient assez petites pour que *v* puissent être considéré comme constante pendant l'intervalle de temps *dt*.

Une fois que la relation mathématique entre les différentielles est établie, la prochaine étape est de généraliser la démarche pour calculer les variations macroscopiques des variables qui nous intéressent. Dans cet exemple nous pouvons être intéressés à déterminer la variation de position, $\Delta x = x_1 - x_0$, associée à un lapse de temps, $\Delta t = t_1 - t_0$, (on utilise le symbole Δ pour indiquer la différence finie entre un état initial et un état final). On utilise alors l'intégration de l'équation (2) entre les limites appropriées :

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{t_0}^{t_1} vdt \tag{3}$$

Les limites d'intégration doivent être cohérents : x_1 est synonyme de $x(t_1)$ et x_0 synonyme de $x(t_0)$. La solution formelle de (3) est :

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} vdt \tag{4}$$

Sans connaître la dépendance entre *v* et *t* on ne peut pas aller plus loin que (4). Par exemple, si le mouvement est uniformément accéléré, $v = at$, avec a = constante. Dans ce cas :

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} atdt = \frac{1}{2}a\left(t_1^2 - t_0^2\right) \tag{5}$$

On peut aussi vouloir connaître la position en fonction de *t* à chaque instant arbitraire, en connaissant la position de départ x_0 au temps $t = 0$. Au lieu de (3) on écrira :

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx' = \int_{0}^{t} v(t')\,dt' \tag{6}$$

Et on obtient :

$$x(t) = \int_0^t v(t')\,dt' + x_0$$
$$x(t) = \int_0^t at'dt' + x_0 \qquad (7)$$
$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + x_0$$

Pourquoi changer le symbole qui représente la variable d'intégration de t à t'? Parce qu'on réserve le symbole *t* pour le temps. La variable «t'» est une variable «muette» qui disparaît dans le processus d'intégration.

Supposons maintenant qui on a la vitesse *v* en fonction de *x* et non de *t*. Dans ce cas il nous faut réarranger l'équation (2) pour séparer les variables *x* et *t*, i.e.,

$$\frac{1}{v(x)}dx = dt \qquad (8)$$

On intègre alors comme d'habitude pour trouver x(t). Par exemple, si $v(x) = \sqrt{2a(x - x_0)}$, alors

$$\int_{x_0}^{x} \left(2a(x' - x_0)\right)^{-1/2} dx' = \int_0^t dt'$$
$$\left[2(2a)^{-1/2}(x' - x_0)^{1/2}\right]_{x_0}^{x(t)} = t \qquad (9)$$
$$\left(\frac{2}{a}\right)^{-1/2}(x - x_0)^{1/2} = t$$
$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + x_0$$

Équations différentielles d'ordre 1 à variables séparables

L'équation (1) est un exemple simple d'équation différentielle linéaire de premier ordre. La grande majorité des équations différentielles qui nous allons rencontrer dans ce cours peuvent être écrites sous la forme générale

$$dy = f(x, y)dx \qquad (9)$$

Si on a la chance de pouvoir exprimer $f(x, y)$ sous la forme :

$$f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad (10)$$

Alors l'équation (9) est une équation différentielle à variables séparables. Il est alors facile d'intégrer l'équation :

$$h(y)dy = g(x)dx \qquad (11)$$

$$\int_{y_0}^{y} h(y')dy' = \int_{x_0}^{x} g(x')dx' \qquad (12)$$

Procédure : La résolution de la plupart des problèmes et démonstrations de ce cours suivent les étapes suivantes :

1. Détermination de l'équation différentielle linéaire de premier ordre qui met en relation les variables qui nous intéressent;
2. utilisation de toute information disponible pour éliminer, si possible, les variables dépendantes (en générale il reste deux);
3. Séparation de variables comme dans l'équation (12)
4. Intégration entre les limites appropriées pour établir la relation fonctionnelle entre les deux variables.

Exercice 7 :

Le taux de croissance de la masse *M* d'une goutte de pluie sphérique, en chute à travers un nuage est donnée par $dM/dt \cong Cr^3$, où $M = \rho_l \frac{4}{3}\pi r^3$ et *C* est une constante.

a) Exprimer l'équation de croissance de la goutte en fonction de son rayon *r*, en éliminant *M* de l'équation de croissance;

Solution : Pour éliminer M dans le système de deux équation ci-dessus on doit calculer

$$dM = d\left(\rho_l \frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_l d\left(r^3\right) = \frac{4}{3}\pi\rho_l 3r^2 dr$$

$$dM = 4\pi\rho_l r^2 dr$$

et substituer sa valeur dans la première équation

$$dM/dt \cong Cr^3; dM = 4\pi\rho_l r^2 dr$$

$$4\pi\rho_l r^2 \frac{dr}{dt} = Cr^3$$

b) Faite la séparation des variables et intégrez l'équation différentielle pour déterminer le rayon en fonction du temps *r*(*t*), en supposant que le rayon initiale est r_0 au temps $t = 0$ secondes;

Solution :

Dans l'équation $4\pi\rho_l r^2 \frac{dr}{dt} = Cr^3$ on a deux variables : *r* et *t*.

On peut séparer les variables en isolant du coté gauche la variable *r* et à droite la variable *t*.

$$4\pi\rho_l r^2 \frac{dr}{dt} = Cr^3 \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{C}{4\pi\rho_l}dt$$

Solution symbolique :

Pour déterminer le rayon en fonction du temps on doit intégrer cette équation :

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = \frac{C}{4\pi\rho_l}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{r}{r_0} = \frac{C}{4\pi\rho_l}t$$

$$r = r_0 \exp\left(\frac{C}{4\pi\rho_l}t\right)$$

Homogénéité dimensionnelle : [m]=[m]exp[(kg $s^{-1}m^{-3}$)(s)/(kg m^{-1})]   OK
ou [mm] = [mm]

c) Si le rayon initiale de la goutte est r_0 = 0,1 mm et C = 30 kg $s^{-1}m^{-3}$, trouvez le rayon de la goutte après 10 minutes de croissance. (Réponse : 0,42 mm)

r_0 = 0,1 mm ; C = 30 kg $s^{-1}m^{-3}$; t = 10 mn

Connaissances : la densité de l'eau est 1000 kg m^{-3} et $r = r_0 \exp\left(\frac{C}{4\pi\rho_l}t\right)$

Solution numérique :

$$r = 0{,}1\exp\left(\frac{30\times600}{4\pi\times1000}\right)$$

$$r = 0{,}42mm$$

Exercice 8 :

L'équation différentielle qui donne la variation de la température, T, de 1 kg d'un gaz parfait avec la pression, p, pendant un processus réversible et adiabatique (sans échange de chaleur avec son environnement) est :

$$dT = \frac{Vdp}{c_p}$$

Où V est le volume et c_p est la capacité calorifique massique à pression constante.

Déterminer la température en fonction de la pression à chaque instant en sachant qu'à la pression p_1, la température est égale à T_1. L'équation d'état des gaz parfaits est $pV = RT$, où $R = R^*/M$ est la constante spécifique du gaz parfait dont la masse molaire est M.

Solution :

1) élimination de la variable V en utilisant l'équation des gaz parfaits, $V = \frac{RT}{p}$: $dT = \frac{RT}{p}\frac{dp}{c_p}$

2) séparation des variables : $\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p}\frac{dp}{p}$

3) intégration :

$$\int_{T_1}^{T}\frac{dT}{T} = \int_{p_1}^{p}\frac{R}{c_p}\frac{dp}{p} \Rightarrow \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

$$T = T_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_p}}$$

Réponse : La variation de la température avec la pression est $T = T_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{nR}{C}}$.

Puisque R et c_p sont des constantes positives, lors de la transformation adiabatique d'un gaz parfait, la température diminue quand la pression diminue ($p_{final} < p_1$) et augmente quand la pression augmente ($p_{final} > p_1$).

Considérons maintenant le cas d'une fonction z qui dépend de deux variables x et y :
z = z(x,y). La variation de z due à la variation de x seulement (y est maintenu constant) est

$$(dz)_y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx \qquad (13)$$

$(dz)_y$ est aussi une différentielle de z et, si x et y sont les coordonnées de l'espace à deux dimensions, représente le changement de z dans la direction x seulement. De façon analogue la variation de z due à la variation de y seulement (x est maintenu constant) est

$$\left(dz\right)_x = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{14}$$

La différentielle totale *dz* est la somme des deux variations :

$$dz = \left(dz\right)_y + \left(dz\right)_x = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{15}$$

À noter que x et y et donc les variations dx et dy sont complètement indépendantes. Pour une fonction à trois variables indépendantes *w = w(x,y,z)* on a la différentielle totale :

$$dw = \left(dw\right)_{y,z} + \left(dz\right)_{x,z} + \left(dz\right)_{x,y} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y} dz \tag{15}$$

La notion de différentielle peut être généralisée à un nombre n de variables indépendantes.

Exercice 9

Trouvez la différentielle totale de la fonction *w = xyz +* sin(*xz*)
Réponse : *dw =*(*yz + z*cos(*xz*))*dx + xzdy* + (*xy + x*cos(*xz*))*dz*

Les différentielles sont très utilisées. Une des utilisations les plus utiles est dans l'estimation des erreurs. En sachant que les mesures de x et y sont entachées d'une erreur de mesure dx et dy, calculez l'erreur absolue de s.

$$ds = \left(ds\right)_y + \left(ds\right)_x = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)_x dy \tag{16}$$

L'erreur relative, $ds/s = d\left(\ln s\right)$ est en générale plus significative que l'erreur absolue. Par exemple, une erreur de 1000 mètres dans la mesure du rayon équatorial terrestre semble une erreur importante, mais comparée au rayon de la Terre, 6378388 mètres correspond à une erreur relative d'à peine 0,00016 = 0,016 %.

Exercice 10

La surface d'un rectangle est A = xy.

a) Calculez l'incertitude dans l'évaluation de la surface d'un rectangle en sachant que les erreurs de mesure de x et y sont respectivement dx et dy.

b) Calculez l'erreur relative dans les mêmes circonstances.

Solution

a) $dA = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x dy = ydx + xdy$

b)

$$\frac{dA}{A} = d\left(\ln A\right) = d(\ln x + \ln y)$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

Différentielles exactes et non-exactes

Comme nous avons déjà affirmé au début de ce document nous sommes intéressés aux variables d'état et aux variables qui dépendent du procédé. La pression est un exemple de variable d'état; le travail et la chaleur sont exemples de variables qui dépendent des processus. Les premières sont définis instantanément et à un point donné. Les deuxièmes ont une signification seulement en connexion avec l'évolution du système dans sont passage d'un état à un autre.

Une différentielle qui est associée à une variable d'état est appelée **différentielle exacte**. Par définition, la valeur d'une intégrale d'une différentielle exacte est indépendante du processus. Elle dépend seulement de la valeur initiale et de la valeur finale. Soit une différentielle exacte *dy*, alors, sa variation entre un état A et un état B est donnée par

$$\int_C dy = y_B - y_A \qquad (17)$$

Où C indique le parcours entre A et B, y_A et y_B les valeur de la variable d'état *y* associées aux états A et b. L'équation (13) est vraie quelque soit le contour C choisi.

De la définition de variable d'état

$$\oint dy = 0 \qquad (18)$$

N'importe quelle différentielle qui ne satisfait les descriptions (17) et (18) est une différentielle non-exacte. La chaleur et le travail sont des exemples de différentielles non-exactes. On utilise pour les représenter symboliquement «δ» au lieu de «*d*».

NOTATION : Si x est une variable d'état, sa différentielle est exacte et on la représente par ***dx***. Si *x* n'est pas une variable d'état on représentera sa différentielle par ***δx***.

Pour un processus cyclique quelconque :

$\oint \delta q \neq 0$ ➔ q n'est pas une variable d'état
$\oint dx = 0$ ➔ x est une variable d'état

Comment reconnaître mathématiquement une différentielle exacte?

1. Si $f = f(x,y)$, alors sa différentielle $df = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ est exacte si
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{19}$$
c'est-à-dire : il faut que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x \partial y}$. Ceci assure la continuité de la fonction $f(x,y)$ qui est une propriété cruciale pour représenter les phénomènes physiques qui sont continus.
2. Si $g = g(x,y,z)$, alors la différentielle $dg = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ est exacte si, simultanément
$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{20}$$

Il est parfois possible de transformer une différentielle non-exacte en différentielle exacte en trouvant le *facteur d'intégration*. Dans les problèmes physiques la physique nous élucide sur l'existence ou non d'un facteur d'intégration.

Exercice 11

Soit la différentielle $\delta f = -ydx + xdy$.

a) Prouvez que ce n'est pas une différentielle exacte
$$\delta f = -ydx + xdy \Rightarrow \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1$$

b) Prouvez que le facteur d'intégration est x^{-2}, ce que veut dire que $\delta f/x^{-2}$ est une différentielle exacte.
$$dv = \frac{\delta f}{x^2} = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{x}{x^2}dy \Rightarrow \frac{\partial(-y/x^2)}{\partial y} = \frac{-1}{x^2} = \frac{\partial(1/x)}{\partial x} = \frac{-1}{x^2}$$