

## 5.4 Équation quasi-géostrophique des tendances du géopotential

Afin de développer une équation de tendance du géopotential, l'idée est de combiner l'équation thermodynamique et l'équation du tourbillon quasi-géostrophique. De cette façon, il sera possible d'obtenir une équation de variation dans le temps du géopotential, ce qui permettra d'étudier le mouvement des systèmes météorologiques dans l'atmosphère.

A. On fait  $\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p}$  [Éq. thermodynamique QG] adiabatique :

$$-\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} f_0^2 \omega \quad (5.16)$$

B. On fait  $f_0 \times$  [Éq. du tourbillon QG] :

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -f_0 \vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (5.17)$$

C. On définit la tendance du géopotential comme suit :  $\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . L'équation du tourbillon sans frottement devient :

$$\nabla^2 \chi = -f_0 \vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (5.18)$$

Et l'équation thermodynamique (5.16) adiabatique devient :

$$-\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \chi = \frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} f_0^2 \omega \quad (5.19)$$

D. On fait (5.19) – (5.18) et on obtient l'équation quasi-géostrophique des tendances du géopotential sans frottement et adiabatique :

$$\underbrace{\left( \nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right)}_1 \chi = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_2 - \underbrace{f_0 \vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right)}_3 \quad (5.20)$$

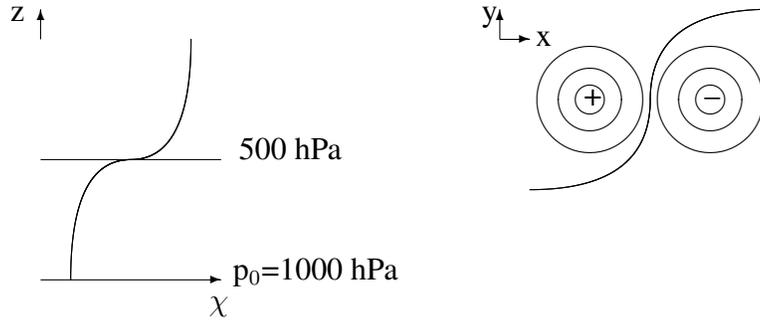
Si on connaît  $\Phi$  partout à un temps donné, on peut calculer les termes 2 et 3 et résoudre pour  $\chi$ . On connaît alors la variation de  $\Phi$  dans le temps et il est possible de le calculer à  $t + \Delta t$ . Cette équation était utilisée dans les années 50-60 pour faire les prévisions météorologiques. C'est une équation pronostique.

- Terme 1 : Laplacien de  $\chi$  en trois dimensions

Supposons que  $\chi$  a cette forme :

$$\chi(x, y, p, t) \sim \chi_0(t) \cos\left(\frac{\pi p}{p_0}\right) \sin(kx) \cos(ly)$$

où  $p_0$  est la pression à la surface,  $k = \frac{2\pi}{L_x}$  et  $l = \frac{2\pi}{L_y}$



$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \chi = \left(-k^2 - l^2 - \frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2}\right) \chi_0(t) \cos\left(\frac{\pi p}{p_0}\right) \sin(kx) \cos(ly)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \chi = -\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2}\right) \chi$$

Parce que  $\sigma > 0$ ,  $(k^2 + l^2) > 0$  et  $\left(\frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2}\right) > 0$ ,  $\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \chi \propto -\chi$ .

Alors, pour

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \chi > 0 \implies \chi < 0 \implies \frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0 : \text{Chute des hauteurs du géopotential.}$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \chi < 0 \implies \chi > 0 \implies \frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0 : \text{Augmentation des hauteurs du géopotential}$$

- Terme 2 : Différentiel vertical d'advection de température (ou d'épaisseur)

Pour une advection chaude de température :  $-\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \propto -\vec{v}_g \cdot \nabla T > 0$

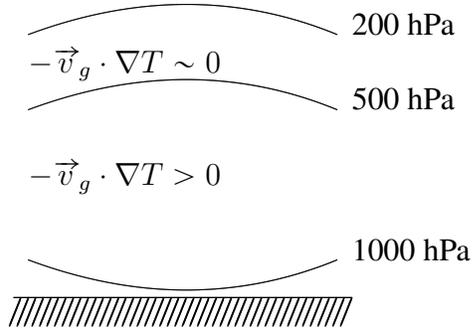
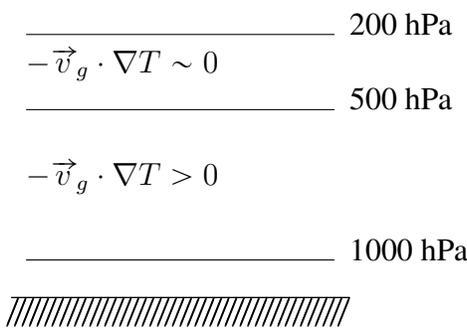
Si l'advection chaude de température décroît avec l'altitude, on aura que

$$-\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] < 0 \implies \left( \nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi < 0 \implies \chi > 0$$

Analysons  $\Phi$  sur le niveau de 500 hPa :

t = 0

t > 0

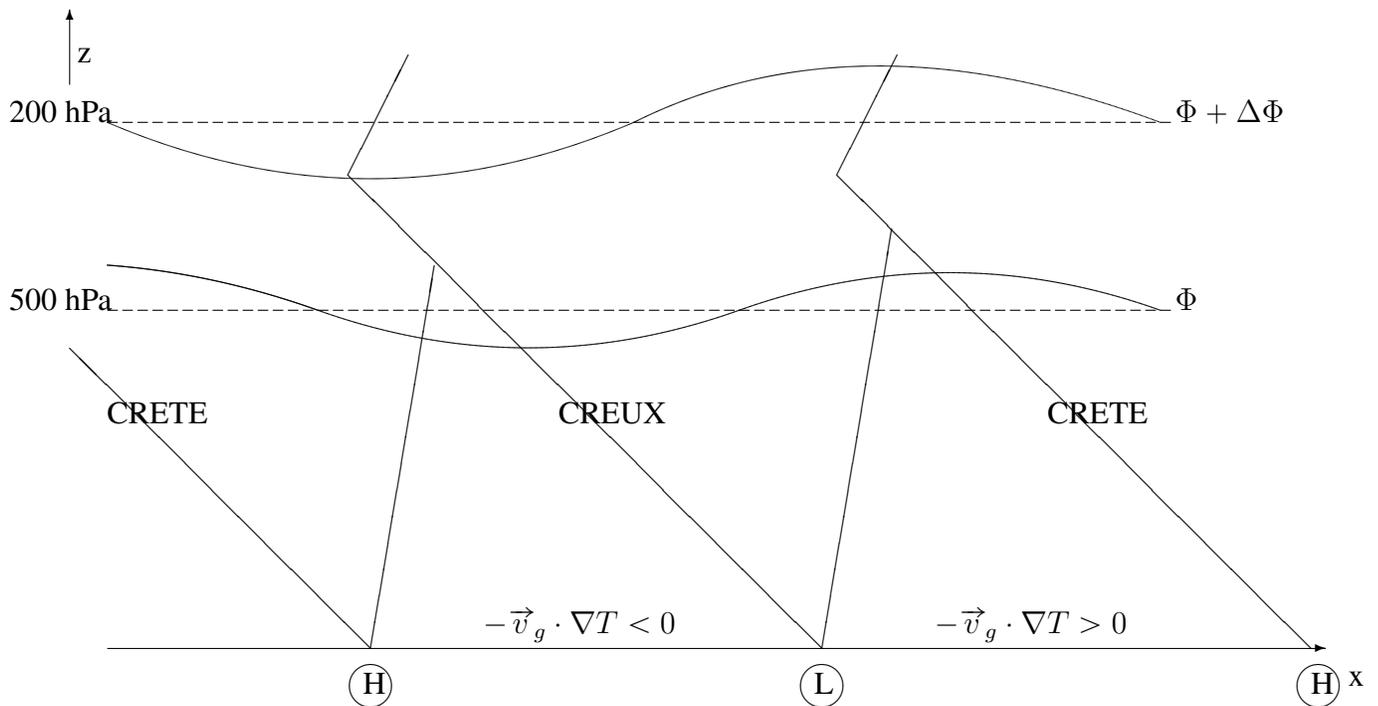


Pour une advection froide de température :  $-\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \propto -\vec{v}_g \cdot \nabla T < 0$

Si l'advection froide de température décroît avec l'altitude, on aura que :

$$-\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] > 0 \implies \left( \nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi > 0 \implies \chi < 0$$

Note : En général, l'atmosphère devient de plus en plus barotrope avec l'altitude. L'advection de température est plus importante dans la région inférieure de l'atmosphère.



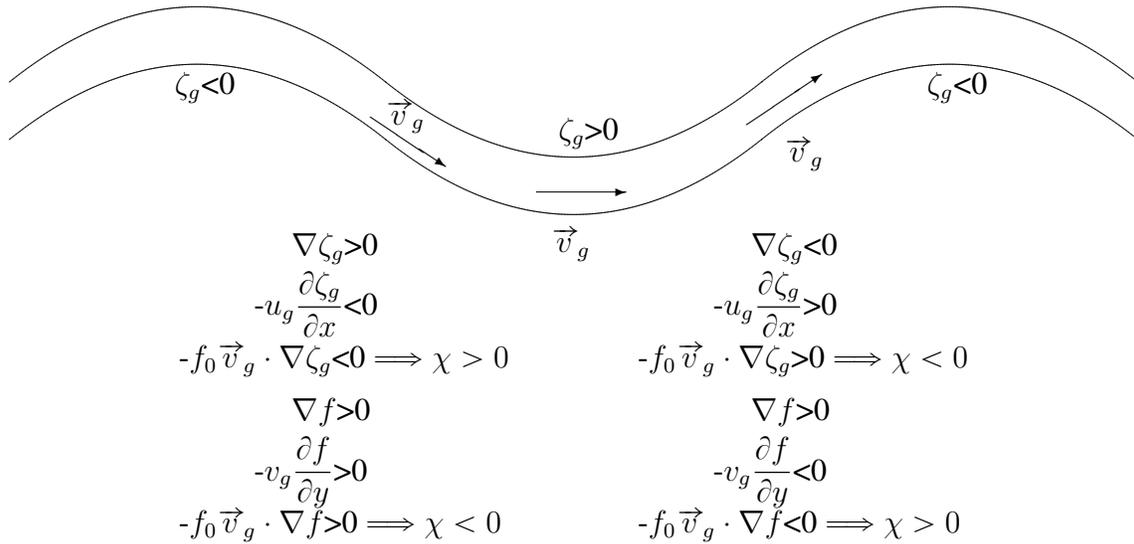
- Devient de plus en plus équivalente-barotrope avec la hauteur
  - Barocline niveau  $> 500$  hPa  $\implies$  advection devient plus importante
  - L'advection de température chaude fait monter les isohypses :
- Ce terme est responsable de l'intensification des creux/crêtes en altitude.

- Terme 3 : Advection du tourbillon absolu géostrophique

On peut séparer les termes :

$$-f_0 \vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) = -f_0 \vec{v}_g \cdot \nabla \zeta_g - f_0 \vec{v}_g \cdot \nabla f$$

L'interprétation de l'advection du tourbillon absolu géostrophique est similaire à l'advection de tourbillon absolu.



Note :

- i. On obtient le même résultat avec l'équation du tourbillon parce que  $\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ .
- ii. L'advection de tourbillon relatif tend à déplacer l'onde vers l'est. L'advection du tourbillon planétaire tend à déplacer l'onde vers l'ouest. La propagation de l'onde dépend donc du terme dominant.
- iii.  $\nabla \zeta_g = 0$  et  $v_g = 0$  dans l'axe associé à un creux ou à une crête. Ceci implique que l'advection de tourbillon absolu ne peut changer l'intensité d'une onde, elle peut seulement la déplacer.

Ce terme est responsable de la propagation des creux/crêtes en altitude.

## 5.5 Équation quasi-géostrophique omega

A) On fait  $\frac{\partial}{\partial p}$ [Éq. tourbillon QG] sans friction :

$$\nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \quad (5.21)$$

B) On fait  $\nabla^2$ [Éq. thermodynamique QG] adiabatique :

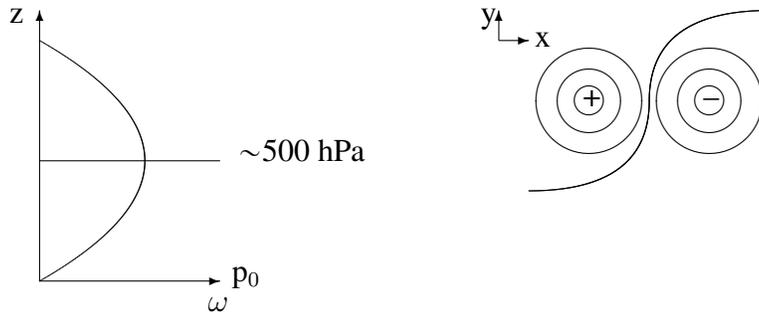
$$-\nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} = \nabla^2 \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] + \sigma \nabla^2 \omega \quad (5.22)$$

C) On fait (5.21) + (5.22) et on obtient l'équation quasi-géostrophique omega sans frottement et adiabatique :

$$\underbrace{\left( \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \right)}_1 \omega = - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]}_2 - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_3 \quad (5.23)$$

On définit  $\omega$  comme suit  $\omega(x, y, p, t) \sim \omega_0 \sin\left(\frac{\pi p}{p_0}\right) \sin(kx) \sin(ly)$  et le terme 1 devient :

$$\left( \nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = - \left( k^2 + l^2 + \frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2} \right) \omega_0 \sin\left(\frac{\pi p}{p_0}\right) \sin(kx) \cos(ly) = - \left( k^2 + l^2 + \frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2} \right) \omega$$



Alors,

$$- \left( k^2 + l^2 + \frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2} \right) \omega = - \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] - \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$$

Afin de simplifier l'analyse de l'équation  $QG - \omega$  qualitative, on peut la simplifier en remplaçant  $\omega \sim -g\rho w$  et l'équation hydrostatique :

$$\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2}\right) \rho g w = \frac{f_0}{\sigma} \frac{1}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] - \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$$

Car  $\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2 \pi^2}{\sigma p_0^2}\right) > 0$  et  $\sigma > 0$ , on peut généraliser la vitesse verticale de l'air :

$$w \propto \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] - \nabla^2 (-\vec{v}_g \cdot \nabla T)$$

Donc, on peut utiliser cette équation pour déduire la distribution du mouvement vertical de l'air dans un système synoptique en développement :

1) Le taux de changement d'advection du tourbillon avec la hauteur. Généralement, l'advection du tourbillon absolu est petite près de la surface et sa grandeur augmente avec l'altitude

2) Le laplacien de l'advection géostrophique de température. Lorsqu'un champ d'advection de température a un minimum/maximum local, le Laplacien aura aussi un minimum/maximum local.

Voici maintenant la description physique de chacun des termes :

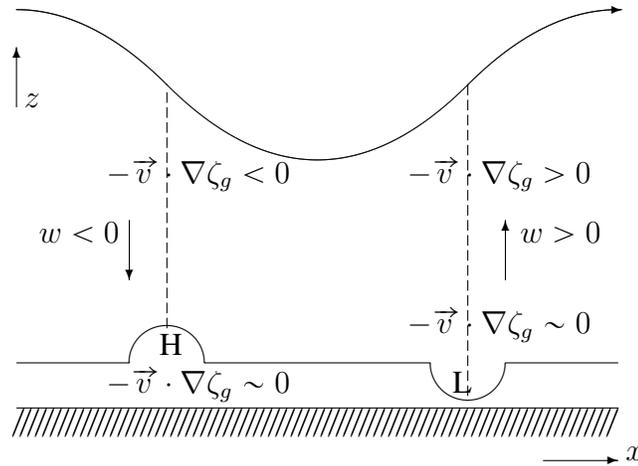
- Terme 1 : Note sur la stabilité statique

On remarque que la stabilité statique  $\sigma$  est présente dans l'équation. Elle est généralement positive. Par contre, sa valeur va influencer l'intensité du mouvement vertical. Comme dans l'équation de température, une grande stabilité influence la température plus qu'une petite stabilité. Donc, plus l'atmosphère est stable plus le mouvement sera petit pour un même forçage synoptique.

L'équation quasi-géostrophique omega est une équation diagnostique qui permet d'évaluer le mouvement vertical à un temps donné, et non son évolution dans le temps comme l'équation QG- $\chi$ .

- Terme 2 : Advection de tourbillon géostrophique absolu différentiel

Considérons un système synoptique en développement :



Pour une onde courte ( $< 3000$  km), l'advection du tourbillon relatif est plus grande que l'advection du tourbillon planétaire. À 500 hPa, l'advection du tourbillon absolu est cyclonique (anticyclonique) en aval d'un creux (d'une crête). Vu que  $\nabla p = 0$  au centre d'une dépression/anticyclone, l'advection de tourbillon absolu est nulle. Donc, l'advection du tourbillon relatif augmente avec la hauteur au-dessus d'une dépression et décroît avec la hauteur au-dessus d'un anticyclone.

Pour une longueur d'onde courte,

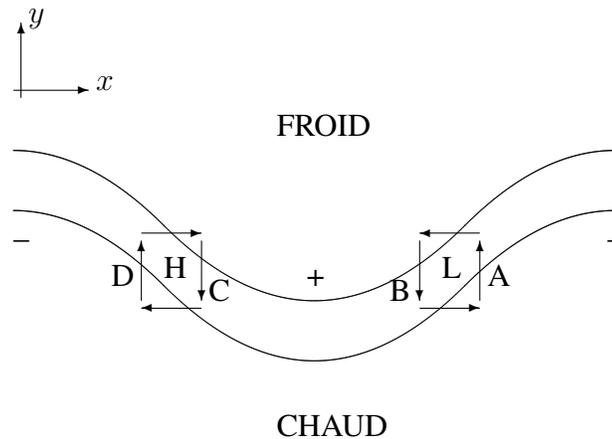
$$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] < 0 \text{ au-dessus de } \textcircled{\text{H}} \implies w < 0$$

$$\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] > 0 \text{ au-dessus de } \textcircled{\text{L}} \implies w < 0$$

Ce terme est responsable de l'intensification d'une dépression/anticyclone. Il explique aussi la position de L/H à la surface.

- Terme 3 : Laplacien de l'advection horizontale de température ou l'advection de température

Supposons des systèmes météorologiques en développement :



On doit localiser les régions où il y a cisaillement du vent vertical car ces régions sont associées avec l'advection de température horizontale dans une couche d'air :

A) Le vent géostrophique tourne dans le sens horaire, donc, il y a transport d'air chaud.

$$-\nabla^2(-\vec{v}_g \cdot \nabla T) \implies -\nabla^2(> 0) \implies -\nabla^2(-\vec{v}_g \cdot \nabla T) > 0 \implies w > 0$$

B) Le vent géostrophique tourne dans le sens anti-horaire, donc, il y a transport d'air froid.

$$-\nabla^2(-\vec{v}_g \cdot \nabla T) \implies -\nabla^2(< 0) \implies -\nabla^2(-\vec{v}_g \cdot \nabla T) < 0 \implies w < 0$$

C) Même raisonnement que pour B.

D) Même raisonnement que pour A.

Ce terme est responsable de la propagation du système météorologique à la surface.

## 5.6 Résumé

On peut combiner les équations quasi-géostrophique des tendances géopotentielle (5.20) et quasi-géostrophique omega (5.23) afin d'illustrer l'essentiel de la structure d'une onde barocline dans l'atmosphère.

Équation pronostique :

$$\left( \nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi = -\frac{\partial}{\partial p} \frac{f_0^2}{\sigma} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] - f_0 \vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right)$$

Équation diagnostique :

$$\left( \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \right) \omega = -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( \frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] - \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[ -\vec{v}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$$

### L'équation QG- $\chi$

Le géopotiel  $\left( \begin{smallmatrix} \text{descend} \\ \text{monte} \end{smallmatrix} \right) \propto$  advection du tourbillon absolu  $\left( \begin{smallmatrix} \text{cyclonique} \\ \text{anticyclonique} \end{smallmatrix} \right)$

+ taux de diminution de l'advection de température  $\left( \begin{smallmatrix} \text{froide} \\ \text{chaude} \end{smallmatrix} \right)$  avec

l'altitude.

### L'équation QG- $\omega$

Le mouvement vertical vers le  $\left( \begin{smallmatrix} \text{haut} \\ \text{bas} \end{smallmatrix} \right) \propto$

augmentation de l'advection du tourbillon absolu  $\left( \begin{smallmatrix} \text{cyclonique} \\ \text{anticyclonique} \end{smallmatrix} \right)$  avec l'altitude

+ advection de température  $\left( \begin{smallmatrix} \text{chaude} \\ \text{froide} \end{smallmatrix} \right)$ .

Le mouvement vertical de l'air  $\omega$  est la circulation secondaire produite par un déséquilibre géostrophique. Cette circulation contribue à garder le changement de température hydrostatique et le changement de tourbillon géostrophique afin de maintenir l'équilibre du vent thermique. L'advection géostrophique (termes de forçage) tend à détruire l'équilibre géostrophique.

Chacun des termes a une implication dans la propagation et l'intensification des systèmes météorologiques en altitude et à la surface :

TABLE 5.1 – Résumé des termes de forçage des l'équations QG- $\chi$  et QG- $\omega$ 

	Intensité	Propagation
Altitude (QG- $\chi$ )	$-\frac{\partial}{\partial p}[-\vec{v}_g \cdot \nabla T]$	$-\vec{v}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f)$
Surface (QG- $\omega$ )	$-\frac{\partial}{\partial p}[-\vec{v}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f)]$	$-\nabla^2[-\vec{v}_g \cdot \nabla T]$

- $-\vec{v}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f)$  est responsable de la propagation d'un creux. Ce terme ne peut pas amplifier un creux car  $v_g = 0$  et  $\nabla\zeta_g = 0$  dans l'axe d'un creux (maximum du tourbillon cyclonique).
- $-\frac{\partial}{\partial p}[-\vec{v}_g \cdot \nabla T]$  est responsable de l'intensification du système en altitude. Il ne contribue pas à changer la position du maximum de tourbillon absolu mais bien à faire diminuer les  $\Phi$  et à faire augmenter le tourbillon relatif dans l'axe du creux ou de la crête.
- $-\vec{v}_g \cdot \nabla(\zeta_g + f)$  est plus faible à la surface parce que l'écoulement de fond est plus faible et les systèmes sont circulaires. Vu que  $\nabla p = 0$  au centre de la dépression,  $\vec{v}_g = 0$  et l'advection du tourbillon absolu au centre de la dépression est nulle.
- La position de la dépression à la surface est déterminée par l'advection du tourbillon différentiel et non par l'advection de température. Vu que  $\vec{v}_g = 0$  et l'advection de température est nulle à cet endroit.
- Si l'advection de température est nulle au centre de la dépression, ce terme de forçage ne peut intensifier le système mais contribue à sa propagation.

Exemple 5-1

Supposer que le géopotential est :

$$\Phi(x, y, p, t) = \bar{\Phi}(y, p) + \Phi'(p, t) \sin(kx) \cos(l y)$$

où  $k = \frac{2\pi}{L_x}$  et  $l = \frac{2\pi}{L_y}$  sont des nombres d'onde et  $L_x$  et  $L_y$  sont les longueurs d'onde et  $\bar{\Phi}(y, p) = \Phi_0(p) - f_0 U y$  où  $\Phi(p)$  est une distribution du géopotential d'une atmosphère standard et  $U$  est la vitesse constante zonale.

a) Démontrer que  $\zeta_g = -(k^2 + l^2)(\Phi - \bar{\Phi})/f_0$ .

b) L'advection du tourbillon dans l'équation de tendance du géopotential est

$$-f_0[\vec{v}_g \cdot \nabla_p(\zeta_g + f)]$$

Expliquer ce que signifie la dépendance de  $\zeta_g$  sur  $(k^2 + l^2)$  de a).

c) Considérer le champ de tourbillon relatif à la Figure 1. Tracer  $\Phi$  associés avec ce patron de tourbillon relatif.

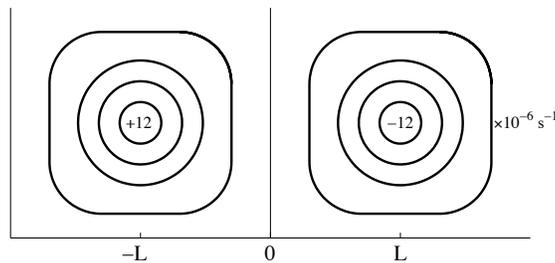


FIGURE 5.1 – Tourbillon relatif de l'exemple # 5-1.

d) Pour ce géopotential, supposer que le vent est constant à  $30 \text{ m s}^{-1}$  et que le vent à  $x=0$  est exactement du sud-est. Déterminer l'échelle de longueur ( $2\Delta L$ ) où l'advection du tourbillon produit une onde stationnaire. Faites les simplifications raisonnables et supposer une latitude de  $45^\circ \text{N}$  et  $\beta = 1.62 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ .