ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Applications des mathématiques:

La loi de Stefan-Boltzmann

Mathématiques Appliquées et Génie Industriel

Résumé La démonstration de la loi de Stefan-Boltzmann à partir de la loi de Planck nécessite l'évaluation d'une intégrale. On démontre comment la méthode des résidus peut être utilisée pour évaluer cette intégrale.

Domaines du génie Tous

Notions mathématiques Intégrales complexes, Résidus

Cours pertinents Analyse appliquée

Auteur(es) M. Laforest, I. Jalliffier-V.

Sommaire

1 Introduction

La loi de Stefan-Boltzmann et son grand cousin la loi de Planck jouent un rôle fondamental en astronomie car elles permettent de prédire à la fois la température et la taille des étoiles ou des planètes extra-solaires à partir des mesures de sa luminosité et de sa distance.

Figure 1: Les Pléiades, Constellation du Taureau.

2 Modélisation

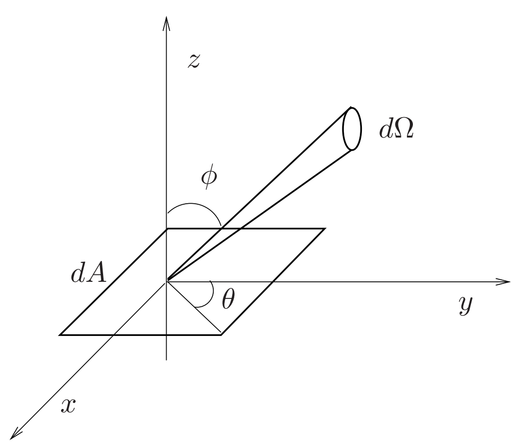
La loi de Planck décrit le taux de radiation d'un objet noir (qui ne réfléchit aucune lumière) dans le vide en fonction de sa température T et de la fréquence ν de radiation observée :

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{1}$$

où $h = 6.626068 \cdot 10^{-34}\, m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$ est la constante de Planck, $c = 299792458\, m \cdot s^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide et $k = 1.3806503 \cdot 10^{-23}\, m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$ est la constante de Boltzmann. Cette loi a été énoncée par Max Planck en 1900. En fait, le taux de radiation $I(\nu, T)$ est donné par unité de fréquence $d\nu$ et unité de région angulaire $d\Omega$, ce qui implique que, pour chaque surface plane d'aire dA, la radiation émise par unité de temps est :

$$I(\nu, T)\, d\nu\, d\Omega\, dA$$

mesurée en (J/s).



La loi de Stefan-Boltzmann, obtenue de manière indépendante, d'abord grâce à des expériences par Stefan en 1879 puis plus tard de manière théorique par Boltzmann en 1884, décrit le taux de chaleur émis par radiation par un objet noir :

$$j = A\sigma T^4 \tag{2}$$

où $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}$ en $kg\, s^{-3}$ et A en m^2 est l'aire de la surface de l'objet. Ci-dessus, les unités de j sont en (J/s).

On peut déduire la loi de Stefan-Boltzmann (2) à partir de l'équation (1) si l'on décompose la surface d'aire A en un ensemble de petites surfaces planes d'aire dA. Pour chaque surface plane, la contribution de dA à la radiation totale de la surface sera :

$$j_{dA} = \left[\int_0^\infty \int_D I(\nu, T) d\nu d\Omega\right] dA$$

où D est la demi-sphère centrée autour de dA par laquelle la radiation traverse. En d'autres mots, on considère que la radiation se propage que dans une des régions de l'espace coupée par le plan dA. Pour simplifier les calculs, plaçons le petit plan dA à l'origine dans le plan xy et introduisons l'angle ϕ entre l'axe des z et θ l'angle dans le plan xy.

Selon l'hypothèse que l'objet est un réflecteur Lambertien (la radiance est indépendante de ϕ), alors on doit avoir :

$$\begin{aligned}
j_{dA} &= dA \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\nu, T) \cos\phi (\sin\phi \, d\phi \, d\theta) d\nu \\
&= 2\pi dA \int_0^\infty I(\nu, T) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\phi}{2} \, d\phi \, d\nu \\
&= \pi dA \int_0^\infty I(\nu, T) d\nu \\
&= dA \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu.
\end{aligned}$$

À l'aide de la méthode des résidus on peut montrer que cette quantité est :

$$j_{dA} = \sigma \, T^4 \, dA.$$

confirmant ainsi que l'on peut déduire l'équation 2 à partir de l'équation 1.

Dans la prochaine section, nous décrivons comment évaluer l'intégrale ci-dessus.

3 Résolution

La question est donc de connaître la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \tag{3}$$

Pour évaluer cette intégrale, nous devons la faire apparaître comme un coefficient d'un développement de Taylor plus complexe. Considérons :

$$\begin{aligned} f(k) &= \mathrm{Im} \int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{e^x - 1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}(e^{ikx})}{e^x - 1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{e^x - 1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} \left[kx - \frac{(kx)^3}{3!} + \frac{(kx)^5}{5!} - \cdots \right] dx \\ &= k \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx - \frac{(kx)^3}{3!} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx + \cdots . \end{aligned} \tag{4}$$

Alors, l'intégrale que l'on recherche est -6 fois le coefficient du terme en k^3 du développement du Taylor de f. Bien que ce ne soit pas évident à première vue, il est plus simple d'évaluer l'équation (4) que l'équation (3). Pour évaluer la partie imaginaire de l'intégrale dans l'équation (4), commençons par identifier ce terme comme une partie d'une intégrale complexe.

La fonction complexe :

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{e^{ikz}}{e^z - 1}. \tag{5}$$

possède des singularités là où $e^z - 1 = 0$, c'est à dire le long de l'axe imaginaire $z = 2\pi n i$ où $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. En fait, ces pôles sont d'ordre 1, qu'on appelle des pôles simples, et les résidus de l'équation (5) aux pôles $z = 0, 2\pi i$ sont :

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\left\{ \frac{e^{ikz}}{e^z - 1}; z_0 = 0 \right\} &= \lim_{z \to 0} \frac{g(z)}{h'(z)} = \frac{e^{ik0}}{e^0} = 1 \\ \mathrm{Res}\left\{ \frac{e^{ikz}}{e^z - 1}; z_0 = 2\pi i \right\} &= \lim_{z \to 2\pi i} \frac{g(z)}{h'(z)} = \frac{e^{ik2\pi i}}{e^{2\pi i}} = e^{-2k\pi}. \end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$ et R très grand, la courbe suivante dans le plan évite ces pôles simples :

- Γ_1 : une droite de $z = \epsilon$ à $z = R$;
- Γ_2 : une droite de $z = R$ à $z = R + 2\pi i$;
- Γ_3 : une droite de $z = R + 2\pi i$ à $z = \epsilon + 2\pi i$;
- Γ_4 : un quart de cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, de $z = \epsilon + 2\pi i$ à $z = 2\pi i - \epsilon i$;
- Γ_5 : une droite de $z = 2\pi i - \epsilon i$ à $z = \epsilon i$;
- Γ_6 : un quart de cercle de $z = \epsilon i$ à $z = \epsilon$.

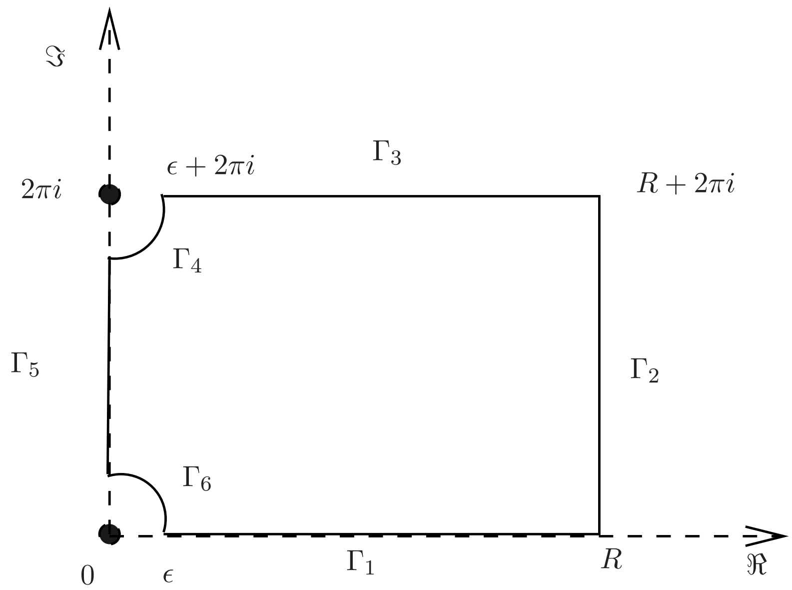


Figure 2: Courbe fermée.

La fonction (5) ne possède aucune singularité à l'intérieur de la région délimitée par $C = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \cdots \cup \Gamma_6$ et donc le théorème de Cauchy nous dit que :

$$\int_C \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz = 0 \tag{6}$$

À gauche de cette expression, on a en fait six intégrales distinctes dont deux des intégrales nous donnent :

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz + \int_{\Gamma_3} \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz \quad = \int_\epsilon^R \frac{e^{ikx}}{e^x - 1} dx + \int_R^\epsilon \frac{e^{ik(x+2\pi i)}}{e^{x+2\pi i} - 1} dx = (1 - e^{-2k\pi}) \int_\epsilon^R \frac{e^{ikx}}{e^x - 1} dx, \tag{7}$$

un multiple de l'intégrale (4) que l'on recherche, du moins quand $\epsilon \to 0$ et $R \to \infty$.

De plus, la partie de l'intégrale (6) à gauche sur la courbe Γ_4 disparaît quand $R \to \infty$ car :

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma_4} \frac{e^{ikz}}{e^z - 1} dz \right| &= \lim_{R\to\infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik(R+is)}}{e^{R+is} - 1} i\, ds \right| \\ &\leqslant \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{|e^{ikR}| \cdot e^{-ks}}{|e^R \cdot e^{is} - 1|} ds \\ &\leqslant \lim_{R\to\infty} \frac{1}{e^R} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{is} - e^{-R}|} ds = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Quant à l'intégrale sur Γ_5, on peut la réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\int_{\Gamma_5}\frac{e^{ikz}}{e^z-1}dz &= \operatorname{Im}\int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon}\frac{e^{ikis}}{e^{is}-1}ids \\
&= \operatorname{Im} i\int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon} e^{-ks}\cdot\frac{e^{\frac{-is}{2}}}{e^{\frac{is}{2}}-e^{\frac{-is}{2}}}ds \\
&= \operatorname{Im}\frac{i}{2i}\int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon} e^{-ks}\cdot\frac{e^{\frac{-is}{2}}}{\sin(\frac{s}{2})}ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{2\pi-\epsilon}^{\epsilon} e^{-ks}\cdot\frac{-\sin(\frac{s}{2})}{\sin(\frac{s}{2})}ds.
\end{aligned}$$

Si on évalue la terme ci-dessus quand $\epsilon \to 0$, on trouvera facilement :

$$\frac{1}{2k}(1-e^{-2k\pi}). \tag{9}$$

Maintenant, il ne nous reste qu'à traiter les intégrales sur Γ_4 et Γ_6 apparaissant dans l'équation (6). Un résultat bien connu nous dit que pour les quarts de cercle autour d'un pôle simple, on obtient $\frac{2\pi i}{4}$ fois la somme des résidus, plus précisément :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_4}\frac{e^{ikz}}{e^z-1}dz+\int_{\Gamma_6}\frac{e^{ikz}}{e^z-1}dz &= \frac{2\pi i}{4}\left[\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{ikz}}{e^z-1};0\right\}+\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{ikz}}{e^z-1};2\pi i\right\}\right] \\
&= \frac{i\pi}{2}\left[1+e^{-2k\pi}\right].
\end{aligned} \tag{10}$$

En conclusion, les formules (7), (8), (9) et (10) appliquées à l'équation (6) nous disent que :

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\operatorname{Im}\int_C\frac{e^{iz}}{e^z-1}dz \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{6}\int_{\Gamma_n}\frac{e^{iz}}{e^z-1}dz \\
&= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}}\operatorname{Im}(1-e^{-2k\pi})\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ikx}}{e^x-1}dx+\frac{1}{2k}(1-e^{-2k\pi})+\operatorname{Im}\frac{i\pi}{2}[1+e^{-2k\pi}].
\end{aligned}$$

En prenant la limite quand $R\to\infty$ et $\epsilon\to 0$, et en se rappelant de la définition (4) de la fonction f, on trouve :

$$\begin{aligned}
f(k) &= -\frac{1}{2k}-\frac{\pi}{2}\frac{1+e^{-2k\pi}}{1-e^{-2k\pi}} \\
&= -\frac{1}{2k}-\frac{\pi}{2}\coth(-\pi k) \\
&= -\frac{1}{2k}+\frac{\pi}{2}\coth(\pi k)
\end{aligned}$$

car :

$$\coth(x)=\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3+\cdots \tag{11}$$

Notre remarque initiale, telle que décrite dans le calcul de l'équation (4), nous disait que :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = -6x \text{ (coefficients du terme } k^3 \text{ de } f).$$

À l'aide de l'équation (11), on voit que ce coefficient est :

$$-\frac{\pi}{2}\pi^3\Big(\frac{1}{45}\Big).$$

et donc que :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 6 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \pi^3 \cdot \frac{1}{45} = \frac{\pi^4}{15}.$$

4 Conclusion

Dans cet exemple, nous avons vu comment calculer une intégrale difficile en utilisant le calcul des résidus. Ceci nous a permis de démontrer la loi de Stefan-Boltzmann.

Références

[1] Loi de Stefan-Boltzmann, http ://en.wikipedia.org/wiki/Stefan–Boltzmann_law. Page consultée le 9 juillet 2009.

CERTAINS DROITS RESERVES