

SCA 5622

Météorologie synoptique et laboratoire de météo

Équation quasi-géostrophique omega

Le lundi 24 mars 2014



Résumé : Suppositions quasi-géostrophiques

- ❶ On définit l'approximation du plan- β aux latitudes moyennes :

$$f(y) = f_0 + \beta y \quad (1)$$

où le paramètre $\beta = \frac{2\Omega \cos \phi_0}{a} = 1.6 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ (à 45° nord).

- ❷ Il est raisonnable d'utiliser une valeur constante du paramètre de Coriolis pour calculer le vent géostrophique car $|f_0| > |\beta y|$. On peut écrire le vent géostrophique par rapport à une latitude de référence ϕ_0 : $\vec{v}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$.

- ❸ Par définition $\vec{v} = \vec{v}_g + \vec{v}_a$ et généralement (1) $|\vec{v}_g| \gg |\vec{v}_a|$ et $|u \frac{\partial u}{\partial x}| > |\omega \frac{\partial u}{\partial p}|$, il est possible d'approximer le taux de changement du vent réel suivant une parcelle d'air comme le taux de changement du vent géostrophique :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{d_g \vec{v}_g}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial y} \quad (2)$$

Dérivation de QG- ω

L'équation QG-thermodynamique

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega + \frac{R}{p c_p} \dot{q} \quad (3)$$

$$\text{où } \sigma = \sigma_p \frac{R}{p}$$

L'équation du QG-tourbillon

$$\frac{\partial_g}{\partial t} \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi \right) = -\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} + \hat{k} \cdot \nabla \times \vec{F}_f \quad (4)$$

❶ On fait $(4) \times \frac{\partial}{\partial p}$:

$$\nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\hat{k} \cdot \nabla \times \vec{F}_f \right) \quad (5)$$

❷ On fait $(3) \times \nabla^2$:

$$-\nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} = \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] + \sigma \nabla^2 \omega + \nabla^2 \left(\frac{\dot{Q}_\alpha}{T_{cp}} \right) \quad (6)$$

❸ On fait Éq (5) + (6).

❹ L'équation quasi-géostrophique omega :

$$\underbrace{\left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \right) \omega}_{1} = - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]}_{2} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_{3} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left(\frac{\dot{Q}_\alpha}{T_{cp}} \right)}_{4} - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\hat{k} \cdot \nabla \times \vec{F}_f \right)}_{5} \quad (7)$$

Dans des conditions atmosphériques adiabatique et sans frottement, les équations sont réduites à :

$$\underbrace{\left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \right)}_1 \omega = - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]}_2 - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_3$$

- Les termes diabatique (4) et de friction (5) sont importants dans la théorie QG mais sont très difficiles à quantifier. Nous allons les négliger pour faciliter l'interprétation des équations avec les cartes météorologiques typiques.
- L'équation QG- ω fait un diagnostique à un temps donné.