SCA 7043 - Météorologie synoptique

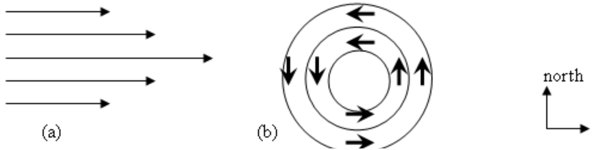
Équation du tourbillon à l'échelle synoptique

Le mardi 01 novembre 2016

UQÀM

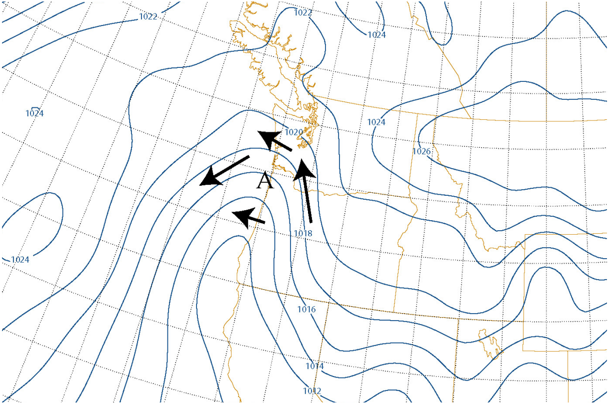
Illustrations

D'où nait le tourbillon (Lackmann, 2011)



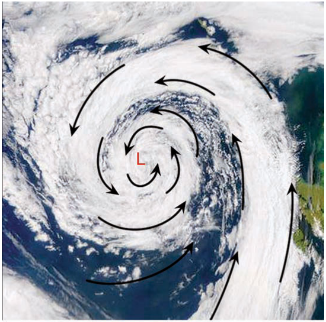
Illustrations

D'où nait le tourbillon (Lackmann, 2011)

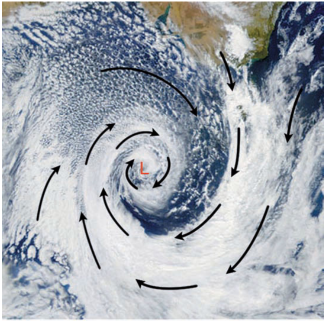


Illustrations

D'où nait le tourbillon (Ahrens, 2009)



(a) Northern Hemisphere

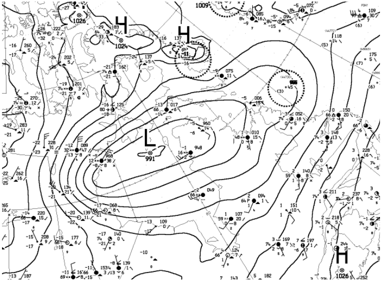


(b) Southern Hemisphere

Pourquoi étudier le tourbillon ?

Théoréme de la circulation et théorême de Stokes

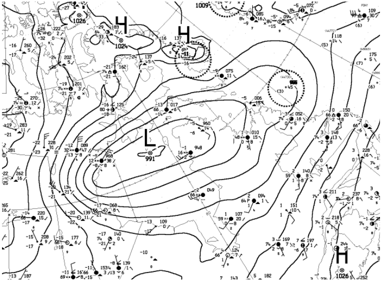
$$C = \oint_C \vec{v} \cdot \vec{dl} = \iint_A (\nabla \times \vec{V}) \cdot \hat{n} dA$$



Quels sont les tourbillons que l'on doit considérer ?

Tourbillon relatif

$$\zeta = \hat{k} \cdot \left(\nabla \times \vec{V} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$



Tourbillon planétaire

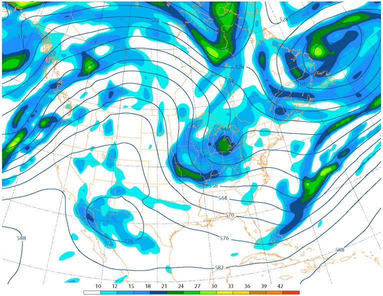
$$\frac{C_p}{A} = \frac{2\Omega \cdot A \cdot \sin \phi}{A} = 2\Omega \sin \phi$$

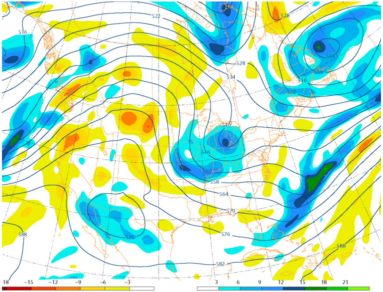
$$\Longrightarrow f = 2\Omega \sin \phi$$

Tourbillon absolu : $\eta = \zeta + f$

Illustrations

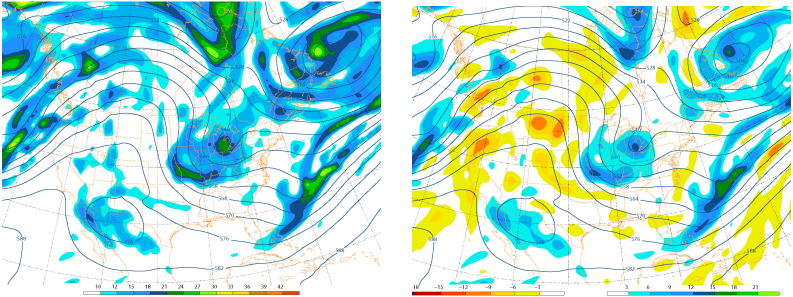
Tourbillons planétaire vs relatif (Lackmann, 2011)





Illustrations

Tourbillons planétaire vs relatif (Lackmann, 2011)



$$\frac{d\zeta}{dt} = ?$$

1) Équations du mouvement en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{f_x} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{f_y} \tag{1b}$$

2) On cherche $\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)$, alors on applique $\frac{\partial(1b)}{\partial x} - \frac{\partial(1a)}{\partial y}$.

3) On obtient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + w\frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$= \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_{f_y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{f_x}}{\partial y}\right) \qquad (2)$$

4) f varie seulement en y, on peut écrire que :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = v\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \underbrace{-\vec{v}\cdot\nabla_h\zeta - w\frac{\partial \zeta}{\partial z}}_{1} \underbrace{-v\frac{\partial f}{\partial y}}_{2} \underbrace{-(\zeta + f)\delta}_{3} + \underbrace{\hat{k}\cdot\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\times\nabla w\right)}_{4}$$
$$+ \underbrace{\hat{k}\cdot\frac{(\nabla\rho\times\nabla p)}{\rho^2}}_{5} + \underbrace{\hat{k}\cdot\left(\nabla\times\vec{F_f}\right)}_{6}$$

Analyse dimensionnelle

Tourbillons **relatif** : $\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \sim \dfrac{U}{L} \sim 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ et **planétaire** $f_0 = 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10}\ \mathrm{s}^{-2}$$

- Terme 1 : $u\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}, v\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \sim \dfrac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10}\ \mathrm{s}^{-2}$ et $w\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \sim \dfrac{WU}{HL} \sim 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-2}$
- Terme 2 : $v\dfrac{\partial f}{\partial y} \sim U\beta \sim 10^{-10}\ \mathrm{s}^{-2}$
- Terme 3 : $-(\zeta + f)\delta \sim -f\delta \sim \dfrac{f_0 U}{L} \sim 10^{-9}\ \mathrm{s}^{-2}$
- Terme 4 : $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \sim 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-2}$
- Terme 5 : $\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\dfrac{\partial p}{\partial x}\right) \sim 10^{-11}\ \mathrm{s}^{-2}$

Ainsi, à l'échelle synoptique, l'équation du tourbillon :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + v\frac{\partial f}{\partial y} = -(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

En terme du tourbillon absolu, $\eta = \zeta + f$, :

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta\delta$$

Équation du tourbillon sur léchelle synoptique

Interprétation Physique

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \boxed{-u\frac{\partial \zeta}{\partial x} - v\frac{\partial \zeta}{\partial y}} \boxed{-v\frac{\partial f}{\partial y}} \boxed{-(\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}$$

Horizontal Advection of Relative Vorticity

- The local relative vorticity will increase (decrease) if positive (negative) relative vorticity is advected toward the location $\rightarrow$ Positive Vorticity Advection (PVA) and $\rightarrow$ Negative Vorticity Advection (NVA)
- PVA often leads to a decrease in surface pressure (intensification of surface lows)

Meridional Advection of Planetary Vorticity

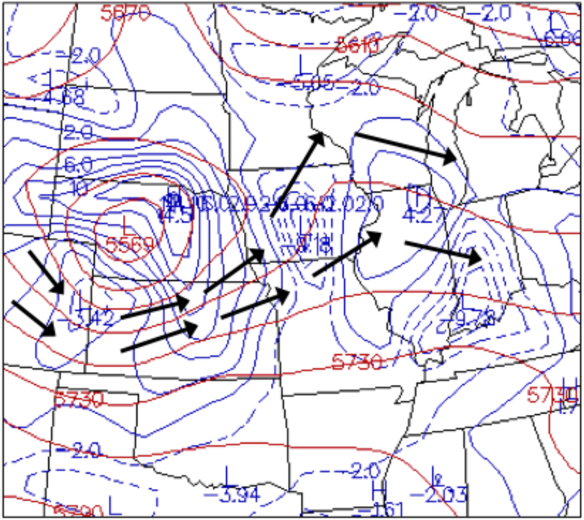
- The local relative vorticity will decrease (increase) if the local flow is southerly (northerly) due to the advection of planetary vorticity (minimum at Equator; maximum at poles)

Divergence Term

- The local relative vorticity will increase (decrease) if local convergence (divergence) exists

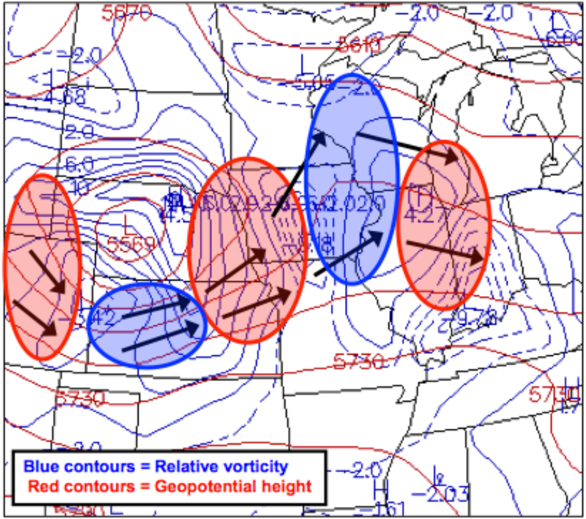
Équation du tourbillon sur léchelle synoptique

Quelles sont les zones de PVA et de NVA utilisant tourbillon a 500 hPa



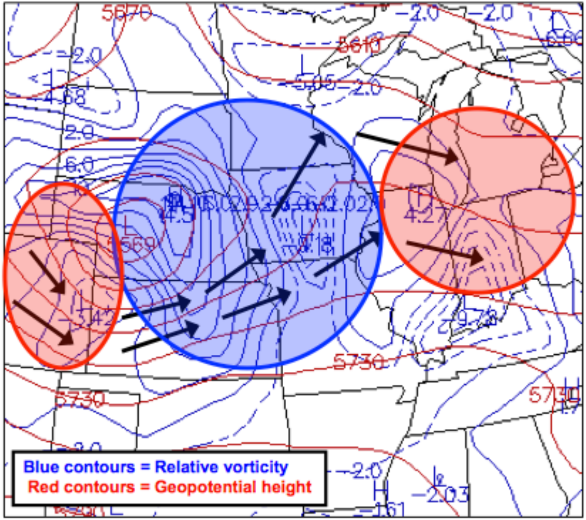
Équation du tourbillon sur léchelle synoptique

Quelles sont les zones de PVA et de NVA utilisant tourbillon a 500 hPa



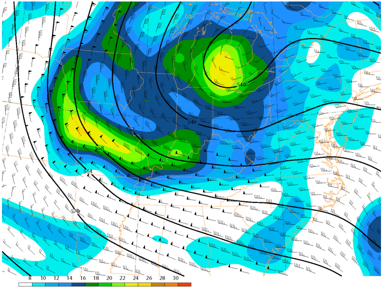
Équation du tourbillon sur léchelle synoptique

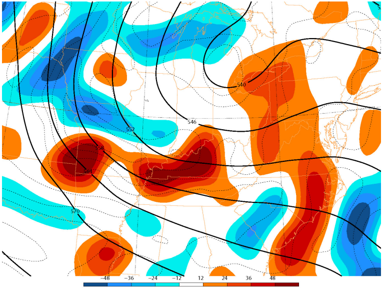
Quelles sont les zones de PVA et de NVA utilisant tourbillon a 500 hPa



Équation du tourbillon sur léchelle synoptique

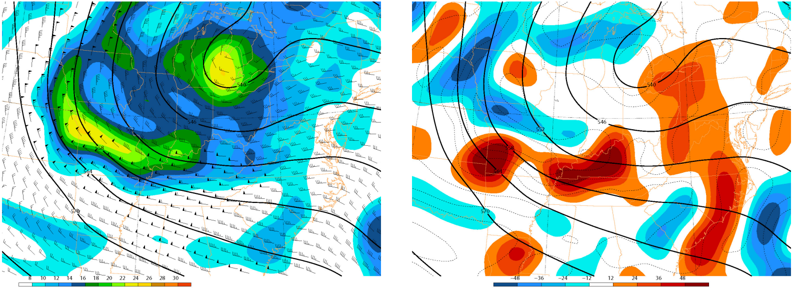
Tourbillons et Advection du tourbillon a 500 hPa (Lackmann, 2011)





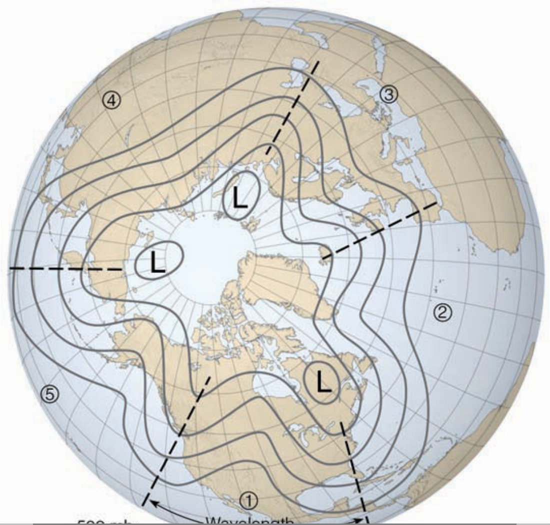
Équation du tourbillon sur léchelle synoptique

Tourbillons et Advection du tourbillon a 500 hPa (Lackmann, 2011)



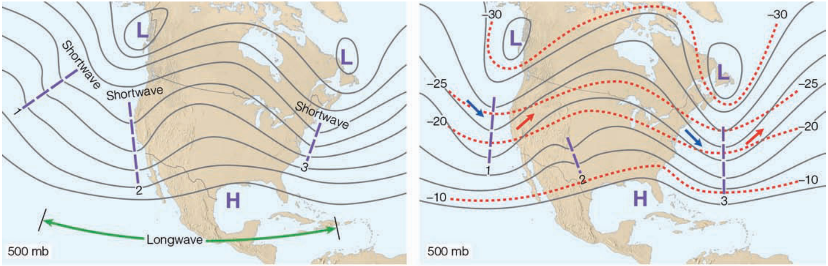
Application de l'équation du tourbillon sur léchelle synoptique

Les ondes de Rossby ou ondes planétaires



Application de l'équation du tourbillon sur léchelle synoptique

Les ondes de Rossby ou ondes planétaires



(a) DAY 1
(b) DAY 2 (24 hours later)

Tourbillon potentiel

Suppositions :

- Homogàne : $\rho =$ constante (incompressible). Donc, le terme de solénoïde est négligeable.
- Hydrostatique : u et v ne dépendent pas de z initialement et ne changent pas dans le temps. Donc, le terme de basculement de l'équation du tourbillon est négligable.
- Frottement négligeable.

L'équation du tourbillon est ainsi réduite à :

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\delta$$

Après manipulation, le tourbillon potentiel est

$$\frac{(\zeta + f)}{H} = \text{constante}$$

Tourbillon potentiel

Vitesse de propagation des ondes de Rossby dans une atmosphère barotrope, non divergent

Suppositions :

- Partant de :$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)\delta$ avec $\frac{df}{dt} = v\frac{\partial f}{\partial y} = v\beta$)
- On se place à 500 hPa, $\delta = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0$
- Prenant un flux zonal d'ouest : $u = u_0 + u'$, $v = v'$, $\zeta = \zeta_0 + \zeta'$
- Une fonction de courant $\psi = Re[\psi_0 \exp^{i\phi}]$, $\phi = kx + ly - \mu t$

On a que : $\delta = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0 \equiv (\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})\zeta + v\beta = 0$

$\Rightarrow (\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x}) \triangle^2 \psi' + \beta\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$

On trouve la relation de phase : $\mu = u_0 - \frac{\beta k}{L^2}$

$c_x = \mu/k \Rightarrow c_x - u_0 = -\frac{\beta}{K^2} < 0$ donc propagation vers l'Ouest

Application de l'équation du tourbillon sur l'échelle synoptique

Les ondes de Rossby ou ondes planétaires

Identifier : les propagation des crêtes et des creux (vitesse de phase) et la propagation de l'énergie ("upstream development")