SCA 7043 - Météorologie synoptique

Quasi-Géostrophisme : Equation de χ

Le Mardi 08 novembre 2016

UQÀM

Résumé : Suppositions quasi-géostrophiques

1. Nombre de Rossby très petit : $R_0 << 1$
2. Écoulement adiabatique et sans frottement, hydrostatique et stabilité statique $\sigma(x, y, z) = \sigma(z)$
3. On définit l'approximation du plan-β aux latitudes moyennes :

$$f(y) = f_0 + \beta y \tag{1}$$

   où le paramètre $\beta = \dfrac{2\Omega \cos\phi_0}{a} = 1.6 \times 10^{-11}$ m^{-1}s^{-1} (à 45° nord).
4. Il est raisonnable d'utiliser une valeur constante du paramètre de Coriolis pour calculer le vent géostrophique car $|f_0| > |\beta y|$. On peut écrire le vent géostrophique par rapport à une latitude de référence ϕ_0 : $\vec{v}_g = \dfrac{1}{f_0}\hat{k} \times \nabla\Phi$.
5. Par définition $\vec{v} = \vec{v}_g + \vec{v}_a$ et généralement (1) $|\vec{v}_g| >> |\vec{v}_a|$ et $|u\dfrac{\partial u}{\partial x}| > |\omega\dfrac{\partial u}{\partial p}|$, il est possible d'approximer le taux de changement du vent réel suivant une parcelle d'air comme le taux de changement du vent géostrophique :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{d_g\vec{v}_g}{dt} = \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t} + u_g\frac{\partial\vec{v}_g}{\partial x} + v_g\frac{\partial\vec{v}_g}{\partial y} \tag{2}$$

Résumé : Reécriture de NS dans le QG

Les équations de base :

1. Mouvement horizontal : $\frac{D_g \vec{u_g}}{Dt} = -f_0 \vec{k} \mathbf{x} \vec{v_a} - \beta y \vec{k} \mathbf{x} \vec{v_g}$
2. Continuité : $\nabla . \vec{u_a} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$
3. Hydrostatisme : $\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p}$
4. Thermodynamique : $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u_g}.\nabla\right) T - \left(\frac{\sigma p}{R}\right) \omega = \frac{J}{C_p}$ avec $\sigma = -RT_0 p^{-1} dln\theta_0 / dp$

Autres équations du système :

1. $f_0 v_g = \frac{\partial \phi}{\partial x}$
2. $f_0 u_g = \frac{\partial \phi}{\partial y}$
3. $\zeta_g = \vec{k}.\nabla \mathbf{x} \vec{u_g} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi$

Dérivation de QG-χ

L'équation QG-thermodynamique

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = -\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) + \sigma\omega + \frac{R}{pc_p}\dot{q} \tag{3}$$

où $\sigma = \sigma_p \dfrac{R}{p}$

L'équation du QG-tourbillon

$$\frac{\partial_g}{\partial t}\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi\right) = -\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0\frac{\partial \omega}{\partial p} + \hat{k}\cdot\nabla\times\vec{F_f} \tag{4}$$

A comparer avec :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{v}\cdot\nabla_h\zeta - w\frac{\partial \zeta}{\partial z} - v\frac{\partial f}{\partial y} - (\zeta + f)\delta + \hat{k}\cdot\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\times\nabla w\right) \tag{5}$$

1. On fait $\frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}$ (3) :

$$-\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial p}f_0^2\omega + \frac{\partial Q}{\partial p} \tag{6}$$

o'ù $Q = \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\dot{q}}{c_p}\frac{\alpha}{T}$

2. On fait $f_0 \times (4)$:

$$\nabla^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right) + f_0^2\frac{\partial \omega}{\partial p} + f_0\hat{k}\cdot\nabla\times\vec{F_f} \tag{7}$$

3. On définit la tendance du géopotentiel comme suit : $\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ et on fait éq $(6) - (7)$.
4. L'équation quasi-géostrophique des tendances géopotentielles :

$$\underbrace{\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi}_{1} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\right]}_{2} - \underbrace{f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)}_{3}$$
$$-\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial p}}_{4} + \underbrace{f_0\hat{k}\cdot\nabla\times\vec{F_f}}_{5} \tag{8}$$

Dans des conditions atmosphériques adiabatique et sans frottement, les équations sont réduites à :

$$\underbrace{\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi}_{1} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\right]}_{2} - \underbrace{f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)}_{3}$$

- Les termes diabatique (4) et de friction (5) sont importants dans la théorie QG mais sont très difficiles à quantifier. Nous allons les négliger pour faciliter l'interprétation des équations.
- L'équation QG-χ prédit un changement dans le temps de Φ.

QG-χ : Quel sera le changement des hauteurs du géopotentiel localement ?

$$\underbrace{\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi}_{1} = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\right]}_{2} - \underbrace{f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)}_{3}$$

Terme 1 : Si on définit χ comme suit :

$$\chi(x, y, p, t) \sim \chi_0 \sin(kx)\cdot\cos(ly)\cdot\cos\left(\frac{\pi p}{p_0}\right),$$

où p_0 est la pression à la surface, $k = \dfrac{2\pi}{L_x}$ et $l = \dfrac{2\pi}{L_y}$.

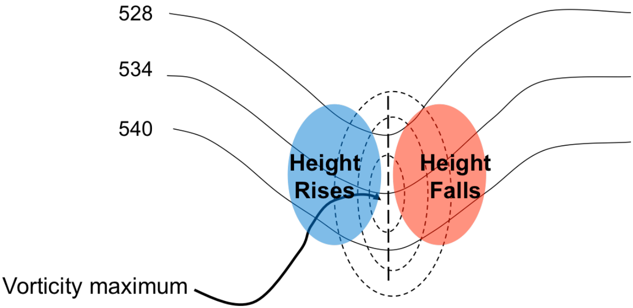
$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi > 0 \Longrightarrow \chi < 0 \Longrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} < 0 : \downarrow \text{ des hauteurs géopotentielles.}$$
$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\chi < 0 \Longrightarrow \chi > 0 \Longrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} > 0 : \uparrow \text{ des hauteurs géopotentielles.}$$

QG-χ : Quel sera le changement des hauteurs du géopotentiel localement ?

En supposant un signal sinusoïdal de χ, l'éq.7 peut être approximée par :

$$-\chi \approx \underbrace{-\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\right]}_{2} \underbrace{-f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)}_{3}$$

Terme 3 : - $f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)$ Advection du tourbillon absolu par le vent géostrophique

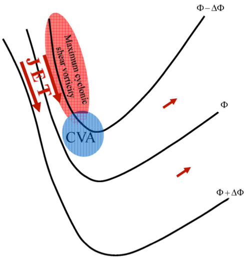


QG-χ : Quel sera le changement des hauteurs du géopotentiel localement ?

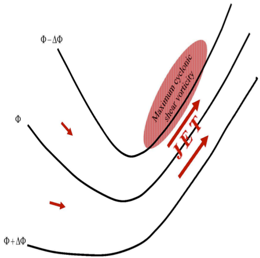
En supposant un signal sinusoïdal de χ, l'éq.7 peut être approximée par :

$$-\chi \approx \underbrace{-\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\right]}_{2} \underbrace{-\, f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)}_{3}$$

Terme 3 : $-\chi \approx -\, f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left[\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right]$ Advection du tourbillon absolu par le vent géostrophique



(a)



(b)

QG-χ : Quel sera le changement des hauteurs du géopotentiel localement ?

En supposant un signal sinusoïdal de χ, l'éq.7 peut être approximée par :

$$-\chi \approx -\underbrace{\frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\right]}_{2} - \underbrace{f_0\vec{v_g}\cdot\nabla\left(\frac{1}{f_0}\nabla^2\Phi + f\right)}_{3}$$

Terme 2 : $-\chi \approx \frac{\partial}{\partial p}\frac{f_0^2}{\sigma}\left[-\vec{v_g}\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)\right]$, Advection différentielle de température