

SCA 7043 - Météorologie synoptique

Quasi-Géostrophisme : Equation de ω

Le Mardi 08 novembre 2016



Résumé : Suppositions quasi-géostrophiques

- 1 Nombre de Rossby très petit : $R_0 \ll 1$
- 2 Écoulement adiabatique et sans frottement, hydrostatique et stabilité statique
 $\sigma(x, y, z) = \sigma(z)$
- 3 On définit l'approximation du plan- β aux latitudes moyennes :

$$f(y) = f_0 + \beta y \quad (1)$$

où le paramètre $\beta = \frac{2\Omega \cos \phi_0}{a} = 1.6 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ (à 45° nord).

- 4 Il est raisonnable d'utiliser une valeur constante du paramètre de Coriolis pour calculer le vent géostrophique car $|f_0| > |\beta y|$. On peut écrire le vent géostrophique par rapport à une latitude de référence ϕ_0 : $\vec{v}_g = \frac{1}{f_0} \hat{k} \times \nabla \Phi$.
- 5 Par définition $\vec{v} = \vec{v}_g + \vec{v}_a$ et généralement (1) $|\vec{v}_g| \gg |\vec{v}_a|$ et $|u \frac{\partial u}{\partial x}| > |\omega \frac{\partial u}{\partial p}|$, il est possible d'approximer le taux de changement du vent réel suivant une parcelle d'air comme le taux de changement du vent géostrophique :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{d_g \vec{v}_g}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \vec{v}_g}{\partial y} \quad (2)$$

Résumé : Réécriture de NS dans le QG

Les équations de base :

- 1 Mouvement horizontal : $\frac{D_g \vec{u}_g}{Dt} = -f_0 \vec{k} \times \vec{v}_a - \beta y \vec{k} \times \vec{v}_g$
- 2 Continuité : $\nabla \cdot \vec{u}_a + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$
- 3 Hydrostatisme : $\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p}$
- 4 Thermodynamique : $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_g \cdot \nabla\right) T - \left(\frac{\sigma p}{R}\right) \omega = \frac{J}{C_p}$ avec
 $\sigma = -RT_0 p^{-1} d \ln \theta_0 / dp$

Autres équations du système :

- 1 $f_0 v_g = \frac{\partial \phi}{\partial x}$
- 2 $f_0 u_g = \frac{\partial \phi}{\partial y}$
- 3 $\zeta_g = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{u}_g = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi$

Dérivation de QG- χ

L'équation QG-thermodynamique

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega + \frac{R}{p c_p} \dot{q} \quad (3)$$

$$\text{où } \sigma = \sigma_p \frac{R}{p}$$

L'équation du QG-tourbillon

$$\frac{\partial_g}{\partial t} \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi \right) = -\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} + \hat{k} \cdot \nabla \times \vec{F}_f \quad (4)$$

A comparer avec :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla_h \zeta - w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - v \frac{\partial f}{\partial y} - (\zeta + f) \delta + \hat{k} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \times \nabla w \right) \quad (5)$$

1 On fait (4) $\times \frac{\partial}{\partial p}$:

$$\nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right] + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\hat{k} \cdot \nabla \times \vec{F}_f \right) \quad (6)$$

2 On fait (3) $\times \nabla^2$:

$$-\nabla^2 \frac{\partial \chi}{\partial p} = \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] + \sigma \nabla^2 \omega + \nabla^2 \left(\frac{\dot{Q}\alpha}{T c_p} \right) \quad (7)$$

3 On fait éq (5) + (6).

4 L'équation quasi-géostrophique omega :

$$\underbrace{\left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2 \right)}_1 \omega = - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]}_2 - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_3 - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left(\frac{\dot{Q}\alpha}{T c_p} \right)}_4 - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(\hat{k} \cdot \nabla \times \vec{F}_f \right)}_5 \quad (8)$$

Dans des conditions atmosphériques adiabatique et sans frottement, les équations sont réduites à :

$$\underbrace{\left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \nabla^2\right)}_1 \omega = - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f\right)\right]}_2 - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)\right]}_3$$

- Les termes diabatique (4) et de friction (5) sont importants dans la théorie QG mais sont très difficiles à quantifier. Nous allons les négliger pour faciliter l'interprétation des équations avec les cartes météorologiques typiques.
- L'équation QG- ω fait un diagnostique à un temps donné.

QG- ω : Quel sera le changement de vitesses verticales localement ?

En supposant un signal sinusoïdal de ω , l'éq.4 peut être approximée par :

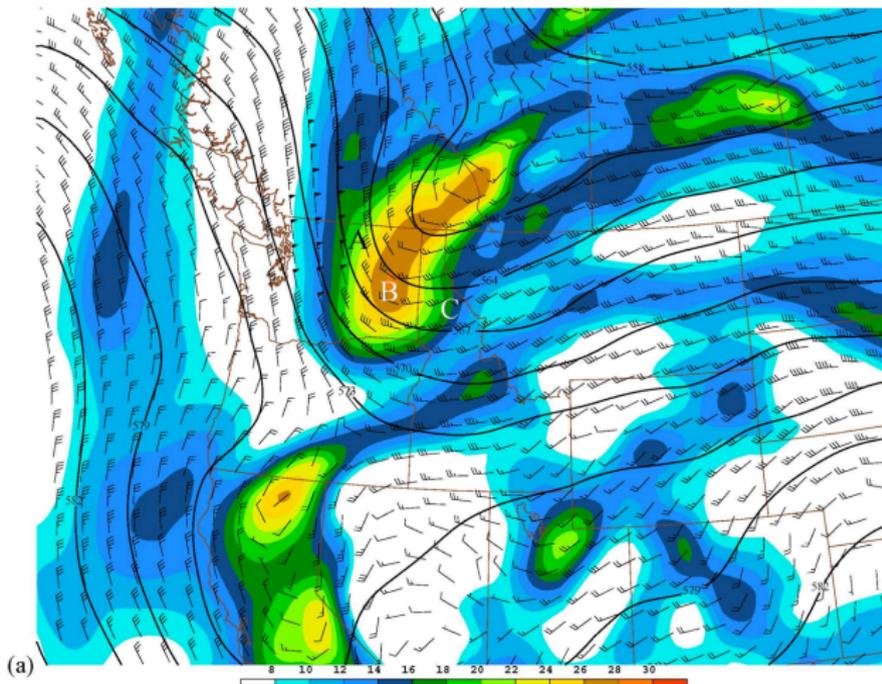
$$-\omega \approx - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]}_2 - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_3$$

Terme 2 : $-\omega \approx -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]$ Advection différentielle du tourbillon absolu par le vent géostrophique

QG- ω : Quel sera le changement de vitesses verticales localement ?

Illustration de l'effet d'advection différentielle de tourbillon

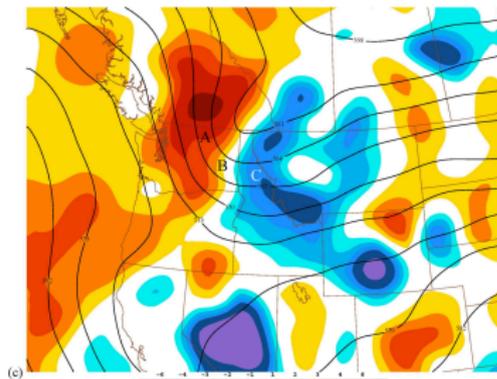
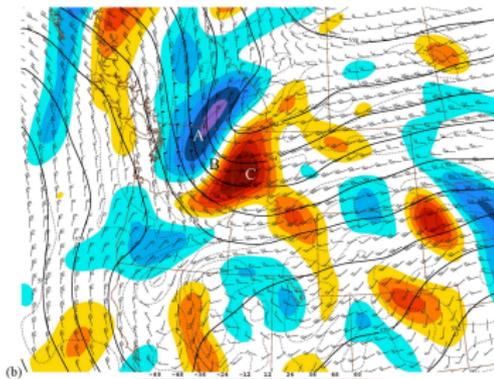
Terme 2 : $-\omega \approx -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]$ Advection différentielle du tourbillon absolu par le vent géostrophique



QG- ω : Quel sera le changement de vitesses verticales localement ?

Illustration de l'effet d'advection différentielle de tourbillon

Terme 2 : $-\omega \approx -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]$ Advection différentielle du tourbillon absolu par le vent géostrophique



QG- ω : Quel sera le changement de vitesses verticales localement ?

En supposant un signal sinusoïdal de ω , l'éq.4 peut être approximée par :

$$-\omega \approx - \underbrace{\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \right]}_2 - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_3$$

Terme 3 : $-\omega \approx -\frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[-\vec{v}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]$ Advection de température par le vent géostrophique