

Propagation d'ondes dans les fluides

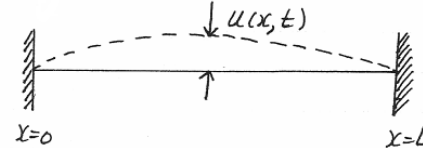
Cours PHY-3123, 2013
Pierre Gauthier

Conditions initiales et conditions aux frontières

- Equation d'onde gouvernant les vibrations d'une corde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- Conditions aux frontières: $u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0$



2.

Méthode de la séparation des variables

- Considère que $u(x, t) = F(x)G(t)$
- Equation d'ondes devient

$$\frac{d^2 G}{dt^2} F = c^2 G \frac{d^2 F}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2 G} \frac{d^2 G}{dt^2} = \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = \lambda$$

La *constante de séparation* λ est indéterminée à ce stade. Ceci conduit à deux équations différentielles:

$$\frac{d^2 G}{dt^2} - \lambda c^2 G = 0,$$

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - \lambda F = 0$$

3

Méthode de la séparation des variables (suite)

Les conditions aux frontières

$$u(x=0, t) = u(x=L, t) = 0$$

ne peuvent être satisfaites que si $\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$

où $n = 1, 2, 3, \dots$: ce sont les valeurs propres du problème. La solution dans ce cas est

$$F(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

4

Méthode de séparation des variables (suite)

- Variation temporelle

$$\frac{d^2 G_n}{dt^2} + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} c^2 G_n = 0$$

$$G_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ct\right)$$

- Solution générale est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ct\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

- Deux conditions initiales sont nécessaires pour déterminer les a_n et b_n :

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Méthode de la séparation des variables (suite)

- Solution générale:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{\pi}{L} ct\right) + b_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} ct\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

- Conditions initiales:

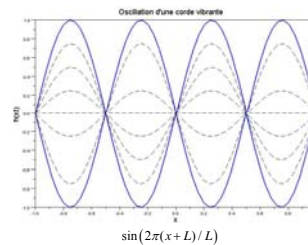
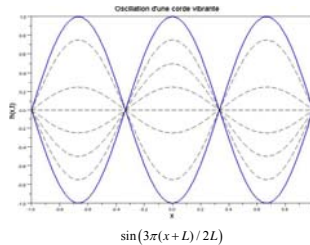
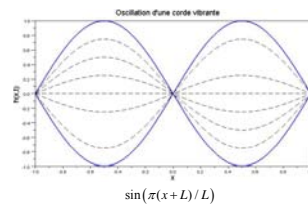
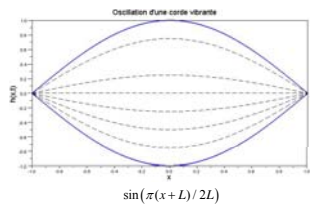
$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) ; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

- Donc:

$$a_n = f_n$$

$$b_n = g_n \frac{L}{n\pi c}$$

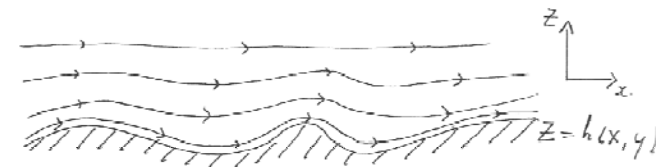
6



7

Conditions aux frontières en mécanique des fluides

- Condition à une frontière rigide pour un fluide inviscide (non visqueux)



- Aucun écoulement transverse à la surface: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$

$$F(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$$

- La normale \mathbf{n} est donc $\mathbf{n} = \nabla F = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, -1 \right)$

8

Conditions aux frontières en mécanique des fluides

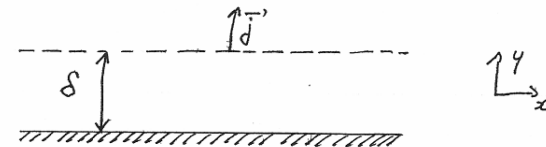
- Condition à une frontière rigide pour un fluide inviscide (non visqueux) est donc

$$w = u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$$

9

Conditions à une frontière rigide pour un fluide visqueux: condition d'adhérence

- Considère une paroi rigide en $y = 0$ et $\mathbf{v} = u(y)\mathbf{i}$



- Force de contact en $y = 0$ est $\mathbf{C}(\mathbf{j}) = -p\mathbf{j} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{i}$

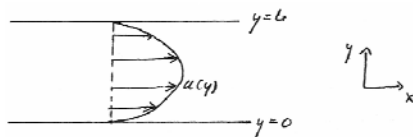
- Lorsque $y < d$, $u \rightarrow 0$, et $y > d$, $u \rightarrow u_0$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y = \delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{u(\delta + \varepsilon) - u(\delta - \varepsilon)}{2\varepsilon} \right] \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{u_0}{\varepsilon} \right) \rightarrow \infty$$

10

Condition d'adhérence en $y = 0$

- Écoulement de Poiseuille: viscosité et gradient de pression constant en x

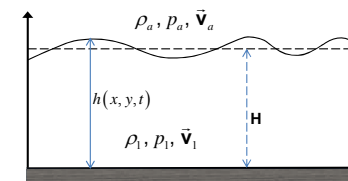


- Vitesse de l'écoulement $\mathbf{v} = u(y)\mathbf{i}$ et pression $p = Gx$:
- Equation de Navier-Stokes Solution

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu u_{,yy} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{G}{2\rho\nu} y(y-L)$$

11

Condition imposée à l'interface entre deux fluides immiscibles



- Position de l'interface: $F(x, y, z, t) = z - h(x, y, t) = cte$
- Interface est une surface matérielle et conséquemment,

$$\frac{dF}{dt} = w - \frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

Donc, $w = h_t + u h_x + v h_y$ en $z = h(x, y, t)$.

- Continuité de la pression:

$$p_l = p_a \quad , \quad \text{en } z = h(x, y, t)$$

15

Ondes dans les fluides: équations de base

- Equation d'Euler (Navier-Stokes sans la viscosité):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g\mathbf{k} \quad (1-a)$$
- Equation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (1-b)$$
- Equation thermodynamique:

$$c_v \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (1-c)$$

16

Forme alternative pour l'équation thermodynamique

- Equation d'état des gaz parfaits: $p = R\rho T \Rightarrow T = \frac{p}{R\rho}$
 Donc,

$$dT = d\left(\frac{p}{R\rho}\right) = \frac{dp}{R\rho} - \frac{p}{R\rho^2} d\rho$$
 et l'équation thermodynamique (1-c) devient

$$\frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \left(\frac{c_p}{c_v}\right) \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} - \gamma RT \frac{d\rho}{dt} = 0$$
 En utilisant l'équation de continuité, ceci s'écrit finalement

$$\boxed{\frac{dp}{dt} + \gamma RT \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0} \quad (2)$$
 où $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

17

Linéarisation des équations

- Etat de base est une solution généralement simple voire triviale du système nonlinéaire
 - Etat de base constant: $u = \bar{u} \quad p = \bar{p} \quad \rho = \bar{\rho}$
 - Perturbations de petites amplitude sont ajoutées à cet état de base

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & u' &\ll \bar{u} \\ p &= \bar{p} + p' & p' &\ll \bar{p} \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho' & \rho' &\ll \bar{\rho} \end{aligned}$$
- On introduit cette forme dans les équations (1-a,b,c) pour obtenir la forme suivante:

18

Linéarisation: cas 1D en x seulement appliqué à la propagation des ondes sonores

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} = -\frac{1}{(\bar{\rho} + \rho')} \nabla(\bar{p} + p') \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{(\bar{\rho} + \rho')} \nabla p'}$$

Par analyse d'échelle, on néglige tous les termes impliquant des produits de perturbations:

$$u' \ll \bar{u} \Rightarrow (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \approx \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}$$

En développant en série de Taylor, on a également

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} = \frac{1}{\bar{\rho}} - \rho' \frac{1}{\bar{\rho}^2} + \dots$$

Forme linéarisée de l'équation d'Euler en 1D:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}}$$

19

Linéarisation

De la même façon, on linéarise l'équation de continuité et l'équation thermodynamique:

$$\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial \rho'}{\partial x}\right) = -(\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial u'}{\partial x} \quad \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \rho' = -\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x}} \quad (3-b)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + \gamma RT (\bar{\rho} + \rho') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) p' + \gamma RT \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0} \quad (3-c)$$

On rappelle la forme linéarisée de l'équation d'Euler pour compléter le tableau:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}} \quad (3-a)$$

La forme linéarisée nous permet maintenant de combiner ces équations pour réduire le nombre de variables indépendantes

Equation des ondes sonores

On applique l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ à (3-c) pour obtenir

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' + \gamma RT \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u'\right) = 0$$

En utilisant la forme linéarisée de l'équation d'Euler, cette expression devient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' + \gamma RT \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}\right) = 0$$

Ce qui conduit à l'équation d'ondes

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' - \gamma RT \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0}$$

Relation de dispersion

On considère des solutions de la forme $p' = \tilde{A}_k e^{ik(x-ct)}$ que l'on introduit dans l'équation d'ondes pour obtenir

$$\left\{(-ikc + ik\bar{u})^2 + \gamma RT k^2\right\} \tilde{A}_k e^{ik(x-ct)} = 0$$

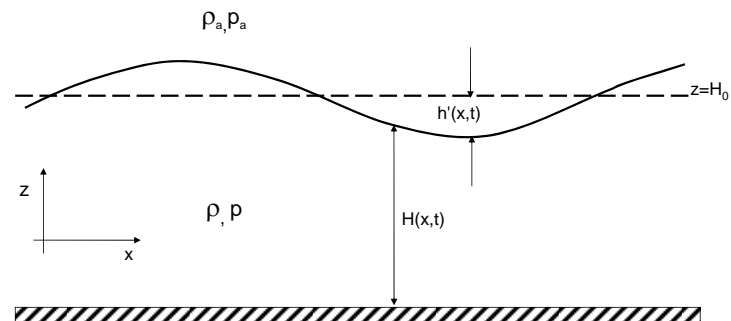
Cette condition ne peut être satisfaite que si

$$c(k) = \bar{u} \pm \sqrt{\gamma RT}$$

Ceci constitue la *relation de dispersion* des ondes sonores qui établit une relation entre la longueur d'onde et la vitesse de propagation. On appelle c la *vitesse de phase* de l'onde. Dans ce cas, l'onde est dite *non-dispersive* car la vitesse de phase est indépendante de la longueur d'onde λ .

Remarque. Le *nombre d'onde* $k = 2\pi/\lambda$ est relié à la longueur d'onde λ tout comme la fréquence angulaire $\omega = kc = 2\pi/T$ est relié à la période T de l'onde.

Propagation d'ondes à la surface d'un fluide incompressible: les ondes de gravité externe



Equations de base et conditions aux frontières

- Considérons deux fluides immiscibles (e.g., eau et air) dont l'évolution est décrite dans le plan (x,z)
 - Pour un fluide de densité uniforme ρ_1 , les équations décrivant l'évolution du fluide de la couche inférieure sont:

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-a)$$

$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1-b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-c)$$

- Conditions aux frontières:
 - i) $w = 0$ en $z=0$, ii) $p = p_a$ en $z = H(x,t)$
 - iii) $w = \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x}$ en $z = H(x,t)$

24

Etat de base et linéarisation

Considérant une solution

$$p = \bar{p}(x, z), \quad u = \bar{u} = const., \quad w = 0 \quad \text{et} \quad H = H_0 = const.$$

En introduisant ceci dans (1), on conclut que

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \bar{p} = \bar{p}(z) \text{ est indépendant de } x$$

Par contre (1-b) implique que

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho_1 g \Rightarrow \bar{p} = p_a + \rho_0 g (H_0 - z)$$

en utilisant la condition-frontière $p=p_a$ en $z = H_0$.

Linéarisation est effectuée des perturbations u' , w' et p' telles que

$$u = \bar{u} + u', \quad w = w', \quad p = \bar{p}(z) + p'$$

25

Equations linéarisées

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2-a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \quad (2-b)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2-c)$$

Conditions aux frontières doivent également être linéarisées:

$$i) \quad w' = \frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad \text{en } z = H_0 + h'$$

$$ii) \quad p = p_a \text{ en } z = H_0 + h' \Rightarrow p = \bar{p} + p' = \rho_0 g (-h') + p_a + p' = p_a$$

$$\therefore h' = \frac{p'}{\rho_0 g} \text{ en } z = H_0 + h'$$

26

Ondes de gravité: équations linéarisées

En $z = H_0 + h'$, (2-b) impose donc que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) w' = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p'}{\partial z} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 h' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \frac{p'}{\rho_0 g} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' + g \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = H_0 + h' \quad (6)$$

Ceci fournit une condition-frontière pour p' . En dérivant (2-a) par rapport à x et (2-b) par rapport à z et ajoutant ensuite les résultats, on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} \right) = -\nabla^2 p'$$

27

Solution de l'équation de Laplace

Equation de continuité nous permet de conclure que

$$\nabla^2 p' = 0 \tag{7}$$

Considère ici des solutions de la forme $p'(x, z, t) = \Phi(z) \exp(i(kx - \omega t))$ que l'on introduit dans (7) pour obtenir que

$$(\Phi'' - k^2 \Phi) e^{i(kx - \omega t)} = 0$$

Dont la solution est $\Phi(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$

Or en $z = 0, w' = 0$ et (2-b) implique que $\frac{\partial p'}{\partial z} = 0$

Conséquemment, $A = B$ et $\Phi(z) = 2A \left(\frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2} \right) = C_1 \cosh(kz)$

Ainsi,

$$p' = C_1 \cosh(kz) e^{i(kx - \omega t)}$$

Relation de dispersion pour les ondes de gravité externe

Introduit cette forme dans la condition-frontière (6) pour obtenir que

$$(-i\omega + ik\bar{u})^2 C_1 \cosh(kz) e^{i(kx - \omega t)} = -C_1 g k \sinh(kz) e^{i(kx - \omega t)}$$

À évaluer en $z = H_0 + h'$. Comme $h' \ll H_0$, on a approximativement que

$$\cosh(k(H_0 + h')) \approx \cosh(kH_0) \quad \sinh(k(H_0 + h')) \approx \sinh(kH_0)$$

La relation de dispersion prend alors la forme $(\omega - k\bar{u})^2 \cong gk \tanh(kH_0)$

ou encore

$$\omega = k\bar{u} \pm \sqrt{gk \tanh(kH_0)}$$

Cas limites:

Ondes en eaux peu profondes: $\frac{\lambda}{H_0} \gg 1 \Rightarrow kH_0 = \frac{2\pi}{\lambda} H_0 \ll 1$

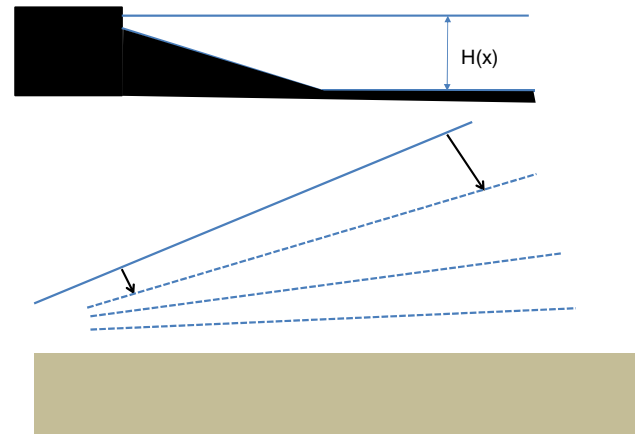
Dans ce cas, $\tanh(kH_0) \approx kH_0$ et alors

$$\omega = k\bar{u} \pm k\sqrt{gH_0} \Rightarrow c = \frac{\omega}{k} = \bar{u} \pm \sqrt{gH_0}$$

Ondes en eaux profondes: $\frac{\lambda}{H_0} \ll 1 \Rightarrow kH_0 = \frac{2\pi}{\lambda} H_0 \gg 1$

Dans ce cas, $\tanh(kH_0) \approx 1$ et $c = \frac{\omega}{k} = \bar{u} \pm \sqrt{g/k}$

Déplacement des vagues vers la côte



Description de l'évolution de u' , w' , h' et p'

- Deux valeurs distinctes pour c sont possibles:

$$\omega_{\pm} = kc_{\pm} = k\bar{u} \pm \sqrt{gk \tanh(kH_0)}$$

- Deux solutions leurs sont associées:

$$p' = \cosh kz \left[C_+ e^{ik(x-c_+t)} + C_- e^{ik(x-c_-t)} \right] + *$$

ou encore, dans la forme réelle,

$$p' = \cosh kz \left[\begin{matrix} A \cos k(x-c_+t) + B \sin k(x-c_+t) \\ + C \cos k(x-c_-t) + D \sin k(x-c_-t) \end{matrix} \right]$$

32

Utilisation des conditions initiales

- Conditions initiales exprimées en termes de $h'(x,0)$ et de sa dérivée temporelle locale $\frac{\partial h'}{\partial t}(x,0) = 0$.

$$h'(x,0) = h_0 \cos kx \quad \frac{\partial h'}{\partial t}(x,0) = 0.$$

- Condition-frontière en $z = H_0 + h'$ (éq.(15))

$$h'(x,t) = \frac{p'}{\rho_0 g} \equiv \frac{\cosh kH_0}{\rho_0 g} \left\{ \begin{matrix} A \cos k(x-c_+t) + B \sin k(x-c_+t) \\ + C \cos k(x-c_-t) + D \sin k(x-c_-t) \end{matrix} \right\}$$

- Ainsi:

$$h'(x,0) = h_0 \cos kx = \frac{\cosh kH_0}{\rho_0 g} [(A+C) \cos kx + (B+D) \sin kx]$$

$$\boxed{B+D=0} \quad \boxed{A+C = \frac{\rho_0 g h_0}{\cosh kH_0}}$$

33

Utilisation des conditions initiales (2)

- Conditions exprimées par la dérivée temporelle locale

$$\frac{\partial h'}{\partial t}(x,0) = 0.$$

- Rappel:

$$h'(x,t) = \frac{p'}{\rho_0 g} \equiv \frac{\cosh kH_0}{\rho_0 g} \left\{ \begin{matrix} A \cos k(x-c_+t) + B \sin k(x-c_+t) \\ + C \cos k(x-c_-t) + D \sin k(x-c_-t) \end{matrix} \right\}$$

- Dérivant h' par rapport à t et en imposant cette deuxième condition initiale implique que

$$c_+ A + c_- C = 0; \quad c_+ B + c_- D = 0$$

$$p' = \frac{\rho_0 g h_0 \cosh kz}{\cosh(kH_0)(c_+ - c_-)} [-c_- \cos k(x-c_+t) + c_+ \cos k(x-c_-t)]$$

$$\equiv P_+(x, z, t) + P_-(x, z, t)$$

34

Evolution de u' et w'

- Considère uniquement la composante se propageant vers la droite P_+

$$p' = \frac{\rho_0 g h_0 \cosh kz}{\cosh(kH_0)(c_+ - c_-)} [-c_- \cos k(x-c_+t) + c_+ \cos k(x-c_-t)] \equiv P_+(x, z, t)$$

- Si $\lambda \gg H_0$, $kH_0 \approx 0$, et la solution est

$$p'(x,t) \approx \frac{\rho_0 g}{2} h_0 \cos(k(x - \sqrt{gH_0}t))$$

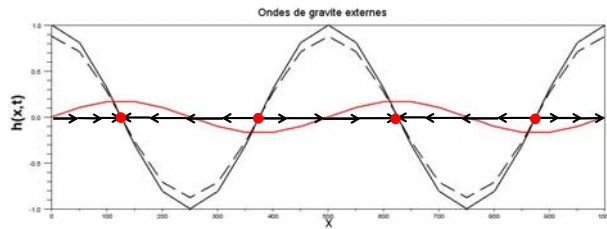
où on a posé également que $\bar{u} = 0$

$$u' = \frac{g h_0}{2\sqrt{gH_0}} [\cos k(x-c_+t) - \cos k(x-c_-t)]$$

$$w' = \frac{g h_0 k z}{2\sqrt{gH_0}} [\sin k(x-c_+t) - \sin k(x-c_-t)]$$

35

Action relative de p' , w' et u'



$p'(x,t) = P+$ ———
 $u'(x,t) = U+$ - - -
 $w'(x,t) = W+$ ———

36

Propagation d'ondes de surface en eaux peu profondes (seconde approche)

37

Equations en eaux peu profondes: équations de Saint-Venant

- Ondes en eaux peu profondes:

$$\frac{\lambda}{H_0} \gg 1 \Rightarrow kH_0 = \frac{2\pi}{\lambda} H_0 \ll 1$$

- Variables p' , h' , u' sont indépendantes de z

- $0 < z < (H_0 + h') \Rightarrow kz < kH_0 \ll 1$
- $\cosh kz \sim 1$

$$p' = \cosh kz \left[A \cos k(x - ct) + B \sin k(x - ct) + C \cos k(x - ct) + D \sin k(x - ct) \right]$$

$$p' = p'(x,t) = \left[A \cos k(x - \sqrt{gH_0}t) + B \sin k(x - \sqrt{gH_0}t) + C \cos k(x + \sqrt{gH_0}t) + D \sin k(x + \sqrt{gH_0}t) \right]$$

38

Equations hydrostatique et de continuité

- Composante verticale de l'équation d'Euler:

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_1 g$$

- * Equation hydrostatique

- Equation de continuité

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Intègre selon z sur toute la colonne de fluide

$$\int_0^{z=H_0+h'} \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int_0^{z=H_0+h'} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dz$$

$$\frac{dh'}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(H_0 + h')$$

en utilisant les conditions aux frontières et le fait que u ne dépend pas de z .

Résolution numérique d'un système d'équations aux dérivées partielles

- Equations linéarisées évaluées en $z = H_0 + h'$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' = -g \frac{\partial h'}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) h' = -H_0 \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)$$

- Méthode spectrale peut être utilisée:

$$u(x,t) = \sum_{n=-N}^{n=N} \tilde{u}_n(0) e^{ik(x-ct)} \quad h(x,t) = \sum_{n=-N}^{n=N} \tilde{h}_n(0) e^{ik(x-ct)}$$

- Ce qui conduit au système d'équations suivant:

$$ik \begin{pmatrix} -c & g \\ H_0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_n(0) \\ \tilde{h}_n(0) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow c_{\pm} = \pm \sqrt{gH_0}$$

Solution comprend deux ondes se propageant en directions opposées

- Aux deux valeurs propres sont associés les vecteurs propres

$$\mathbf{v}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{g/H_0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Conséquemment la solution est telle que

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ h(x,t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} +\sqrt{g/H_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik(x-\sqrt{gH_0}t)} + A_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{g/H_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik(x+\sqrt{gH_0}t)}$$

- A_1 et A_2 étant obtenus des conditions initiales

$$A_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{H_0/g} u_0 + h_0) \quad A_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{H_0/g} u_0 + h_0)$$

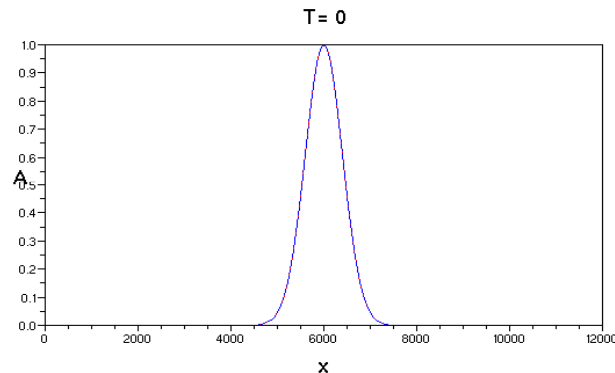
- **Remarque:** pour des conditions initiales arbitraires $u_0(x)$ et $h_0(x)$, il faut poser $u_0(x) = \pm h_0(x) \sqrt{H_0/g}$ pour que l'onde se propage dans une seule direction

Evolution de la solution

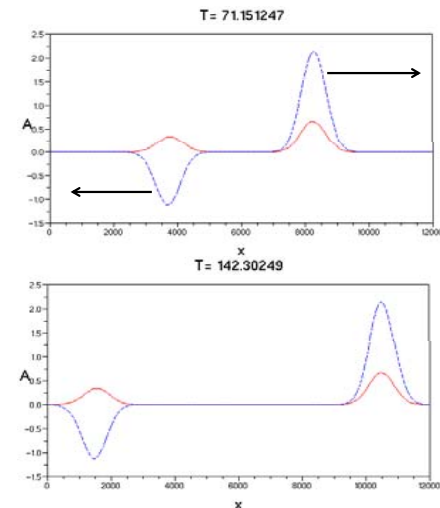
Conditions initiales: $u(x,0) = 0$

$$h(x,0) = h_0 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2L^2}\right)$$

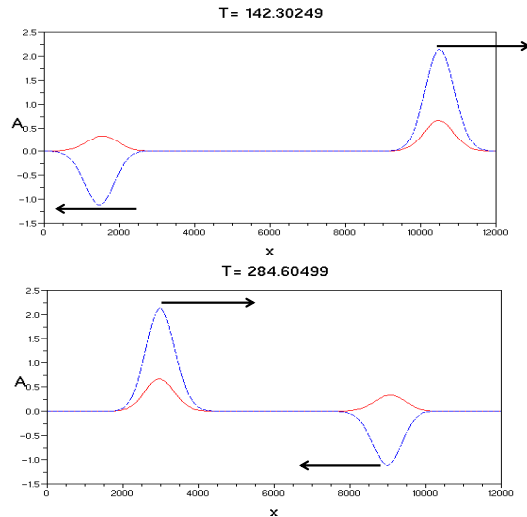
$g = 10 \text{ ms}^{-2}$ $H = 100\text{m}$ $h(x,t)$ en bleu $u(x,t)$ en rouge



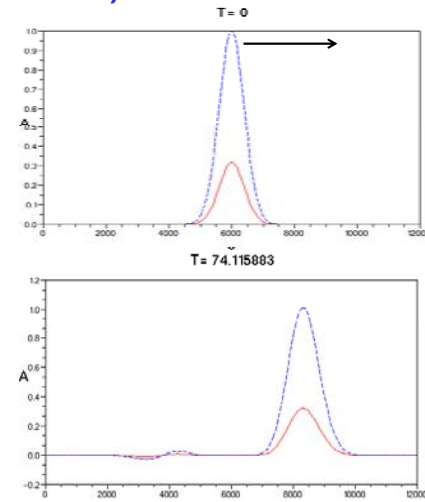
Evolution dans le temps (domaine périodique)



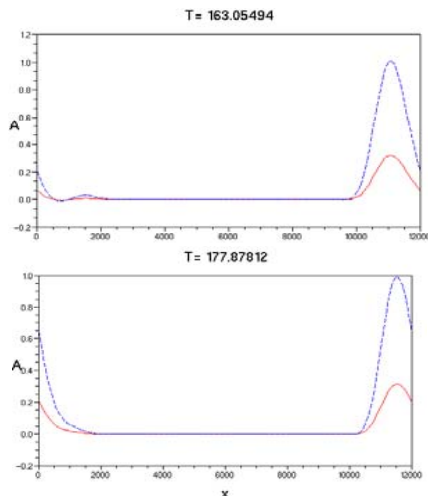
Intégration du cas périodique en différences finies



Intégration du cas périodique (propagation unidirectionnelle)



Intégration du cas périodique en différences finies (propagation unidirectionnelle)



Conclusion

• Mouvement des fluides donnent lieu à différents types de propagation d'ondes dont

- * Ondes acoustiques associées à des variations rapides de la pression
- * Ondes dites de gravité externe générées par la variation horizontale de la divergence qui crée une variation de la hauteur de la colonne de fluide

• Dynamique de l'atmosphère est influencée par la présence de la rotation

- * Ondes planétaires reliées au gradient de température nord-sud et la 'force de Coriolis'
- * Ondes créées par le gradient vertical de température que l'on associe à la convection (ondes de gravité interne)