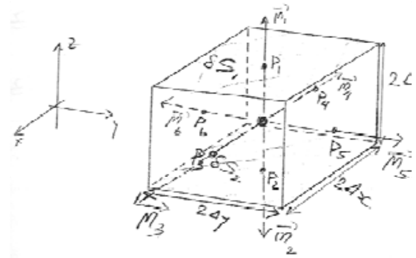
PHY-3123 Mathématiques de base pour la mécanique des fluides

Pierre Gauthier, professeur
Déapartement des sciences de la terre et de l'atmosphère
UQAM
Bureau: PK-7210
Courriel: gauthier.pierre@uqam.ca

UQÀM Department of Earth and Atmospheric Sciences
Université du Québec à Montréal

Divergence

$$P_1 = (x_0, y_0, z_0 + \Delta z) \quad P_2 = (x_0, y_0, z_0 - \Delta z) \quad P_3 = (x_0 + \Delta x, y_0, z_0)$$
$$P_4 = (x_0 - \Delta x, y_0, z_0) \quad P_5 = (x_0, y_0 + \Delta y, z_0) \quad P_6 = (x_0, y_0 - \Delta y, z_0)$$

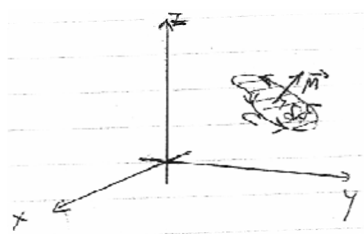


$$\varphi_1 = \mathbf{f}(P_1) \bullet \mathbf{n}_1 \delta S_1 = f_3(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)\ 4\Delta x \Delta y$$
$$\varphi_2 = \mathbf{f}(P_2) \bullet \mathbf{n}_2 \delta S_2 = -f_3(x_0, y_0, z_0 - \Delta z)\ 4\Delta x \Delta y$$
$$\varphi_3 = \mathbf{f}(P_3) \bullet \mathbf{n}_3 \delta S_3 = f_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0)\ 4\Delta y \Delta z$$
$$\varphi_4 = \mathbf{f}(P_4) \bullet \mathbf{n}_4 \delta S_4 = -f_1(x_0 - \Delta x, y_0, z_0)\ 4\Delta y \Delta z$$
$$\varphi_5 = \mathbf{f}(P_5) \bullet \mathbf{n}_5 \delta S_5 = f_2(x_0, y_0 + \Delta y, z_0)\ 4\Delta x \Delta z$$
$$\varphi_6 = \mathbf{f}(P_6) \bullet \mathbf{n}_6 \delta S_6 = -f_2(x_0, y_0 - \Delta y, z_0)\ 4\Delta x \Delta z$$

$$(\nabla \bullet \mathbf{f})_{X_0} \equiv div\,\mathbf{f}(X_0) = \lim_{\delta V \to 0} \left\{ \frac{\textit{flux}\text{ de }\mathbf{f}\text{ vers l'extérieur de }\delta V}{\delta V} \right\}$$

Définition du rotationnel

- **Mesure de la circulation autour d'une surface fermée δA bornée par la courbe C**

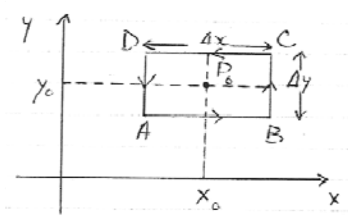


- **Définition:**

$$(\nabla \times \mathbf{f}) \bullet \mathbf{n} = \lim_{\delta A \to 0} \left\{ \frac{\oint_c \mathbf{f} \bullet d\mathbf{l}}{\delta A} \right\}$$

Cas où $\delta \mathbf{A} = \Delta x \Delta y\ \mathbf{k}$

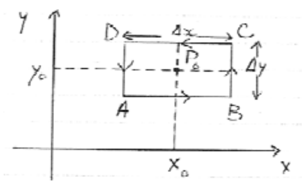
- **Considère que la boucle est dans le plan XY et qu'alors $\delta \mathbf{A} = \Delta x \Delta y\ \mathbf{k}$**



$$\nabla \times \mathbf{f} = T_1 \mathbf{i} + T_2 \mathbf{j} + T_3 \mathbf{k}$$

$$T_3 = (\nabla \times \mathbf{f}) \bullet \mathbf{k} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{ \frac{\oint_c \mathbf{f} \bullet d\mathbf{l}}{\Delta x \Delta y} \right\}$$

Calcul du rotationnel



$$\int_{AB} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{l} = \int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{X_0+\frac{\Delta x}{2}} f_1\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) dx \cong \Delta x f_1\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)$$

$$\int_{BC} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{l} \cong \Delta y f_2\left(X_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)$$

$$\int_{CD} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{l} \cong -\Delta x f_1\left(X_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)$$

$$\int_{DA} \mathbf{f} \bullet d\mathbf{l} \cong -\Delta y f_2\left(X_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right).$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{ \frac{\oint \mathbf{f} \bullet d\mathbf{l}}{\Delta x \Delta y} \right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f_2\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) - f_2\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)}{\Delta x} \right)$$

$$- \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{f_1\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) - f_1\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)}{\Delta x} \right)$$

$$= \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = T_3$$

Même raisonnement permet de déterminer T_1 et T_2

Expression pour le rotationnel

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Exemple: $\mathbf{v}(x, y) = -\Omega y \mathbf{i} + \Omega x \mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$

$$(\nabla \times \mathbf{v}) = 2\Omega \mathbf{k}$$

- Rotationnel correspond donc à deux fois la vitesse angulaire associé à cet écoulement
- On appelle *tourbillon* ou *vorticité* le vecteur

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V}}$$

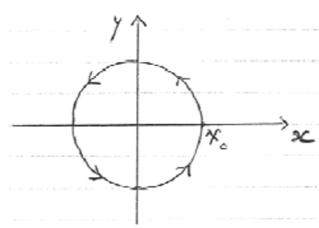
Rotationnel d'un écoulement

- **Exemple d'un écoulement purement rotationnel**

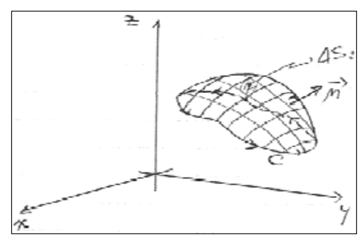
$$u = \frac{dx}{dt} = -\Omega y \qquad v = \frac{dy}{dt} = +\Omega x$$

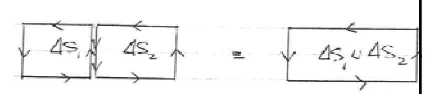
- **Solution d'un système d'équations différentielle pour les conditions initiales x(0) =x_0 et y(0) = y_0 :**

$$x(t) = x_0 \cos \Omega t - y_0 \sin \Omega t$$
$$y(t) = x_0 \sin \Omega t + y_0 \cos \Omega t$$



Théorème de Stokes $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l}$





$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} ds = \lim_{\Delta S_i \to 0} \left\{ \sum_i \nabla \times \mathbf{F}(P_i) \bullet \mathbf{n}_i \Delta S_i \right\} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \left\{ \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l} \right\}$$

$$\boxed{\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} ds = \lim_{\Delta S_i \to 0} \left\{ \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l} \right\} = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l}}$$

Dépt. Sciences de la Terre et de l'atmosphère
Université du Québec à Montréal

Cas particulier: théorème de Green

- **S'applique aux écoulements bi-dimensionnels**

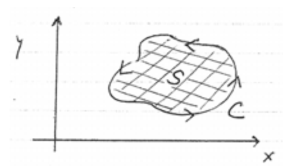
$$\mathbf{F}(x,y) = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$$

- **Rotationnel n'a qu'une seule composante**

$$\nabla \times \mathbf{F} = T_3\mathbf{k} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

- **Théorème de Green**

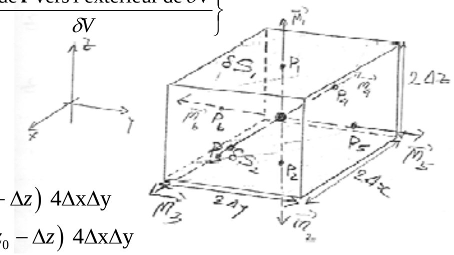
$$\boxed{\iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1\right)dxdy = \oint_C \mathbf{F}\bullet\mathbf{dl} = \oint_C F_1dx + F_2dy}$$



Divergence d'un écoulement

$$\nabla \bullet \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

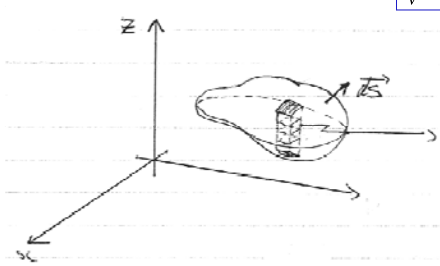
$$(\nabla \bullet \mathbf{f})_{X_0} \equiv div\,\mathbf{f}(X_0) = \lim_{\delta V \to 0}\left\{\frac{\textit{flux}\text{ de }\mathbf{f}\text{ vers l'extérieur de }\delta V}{\delta V}\right\}$$



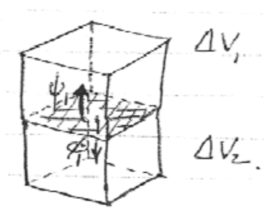
$$\varphi_1 = \mathbf{f}(P_1)\bullet\mathbf{n}_1\delta S_1 = f_3(x_0,y_0,z_0+\Delta z)\ 4\Delta x\Delta y$$
$$\varphi_2 = \mathbf{f}(P_2)\bullet\mathbf{n}_2\delta S_2 = -f_3(x_0,y_0,z_0-\Delta z)\ 4\Delta x\Delta y$$
$$\varphi_3 = \mathbf{f}(P_3)\bullet\mathbf{n}_3\delta S_3 = f_1(x_0+\Delta x,y_0,z_0)\ 4\Delta y\Delta z$$
$$\varphi_4 = \mathbf{f}(P_4)\bullet\mathbf{n}_4\delta S_4 = -f_1(x_0-\Delta x,y_0,z_0)\ 4\Delta y\Delta z$$
$$\varphi_5 = \mathbf{f}(P_5)\bullet\mathbf{n}_5\delta S_5 = f_2(x_0,y_0+\Delta y,z_0)\ 4\Delta x\Delta z$$
$$\varphi_6 = \mathbf{f}(P_6)\bullet\mathbf{n}_6\delta S_6 = -f_2(x_0,y_0-\Delta y,z_0)\ 4\Delta x\Delta z$$

Théorème de Gauss

$$\boxed{\iiint_V \nabla\bullet\mathbf{F}dV = \oiint_S \mathbf{F}\bullet d\mathbf{S}}$$



$$\iiint_V \nabla\bullet\mathbf{F}dV = \lim_{\Delta V_i \to 0}\left\{\sum_i \nabla\bullet\mathbf{F}(P_i)\Delta V_i\right\}$$



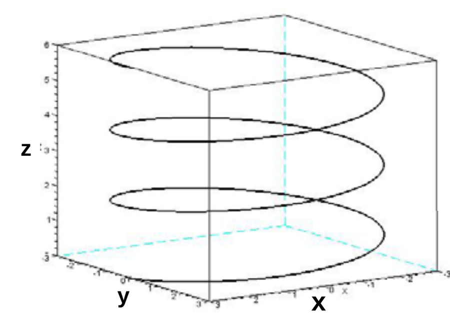
$$\nabla\bullet\mathbf{F}(P_1)\Delta V_1 + \nabla\bullet\mathbf{F}(P_2)\Delta V_2 = (\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_6) + (\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_6).$$

Écoulement 3D

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = +\Omega y;\quad \frac{dy}{dt} = -\Omega x;\quad \frac{dz}{dt} = v_0}$$

Conditions initiales

$$x(0) = R_0;\quad y(0) = \frac{1}{\Omega}\frac{dx}{dt} = 0;\quad z(0) = 0;$$



Solution: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (R_0\cos(\Omega t), R_0\sin(\Omega t), v_0 t)$

Théorème de Helmholtz

- **Ecoulement peut être décomposé en une composante purement divergente $\mathbf{v}_d$ et une composante purement rotationnelle $\mathbf{v}_r$**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_r$$

$$\nabla \bullet \mathbf{v}_r = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{v}_d = 0$$

- **Référence: Annexe J.R. Holton**
  Introduction to Dynamic Meteorology
- **Cas à deux dimensions:**

$$\mathbf{v}_d = \nabla \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \chi}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{k} \times \nabla \psi = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\mathbf{j}$$

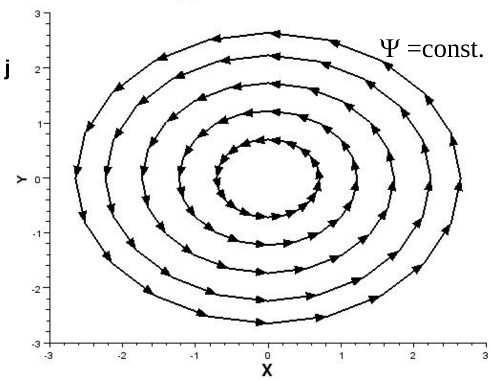
$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla^2 \psi = \zeta \\ \nabla \bullet \mathbf{v} &= \nabla^2 \chi = D \end{aligned}}$$

Ecoulement non-divergent représenté par une fonction de courant

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \Psi(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathbf{j}$$

où $\Psi(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$

Lignes de courant



Introduction à l'analyse tensorielle

- **Convention de sommation d'Einstein:**

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \mathbf{e}_i \equiv A_i \mathbf{e}_i$$

Lorsqu'un indice est répété, il est implicitement sommé. De façon générale on désignera un vecteur par A_i

- **Considère deux vecteurs A_i et B_i alors**

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_i B_i$$

- **Représentation d'une matrice**

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad M_{ij} x_j = b_i$$

- **Delta de Kronecker**
-

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta_{ii} = 3$$

Ecoulements rotationnels

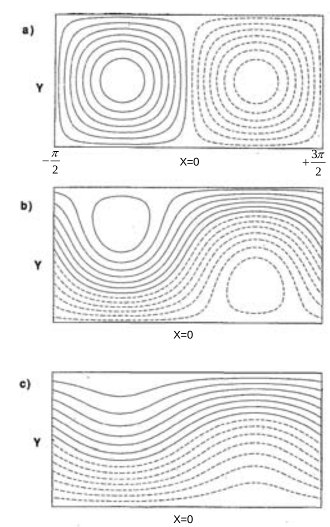
Fonction de courant

$$\psi = -U_0 y + R_0 \cos x \cos y$$

Composantes des vitesses

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 + R_0 \cos x \sin y$$

$$v = +\frac{\partial \psi}{\partial x} = -R_0 \sin x \cos y$$

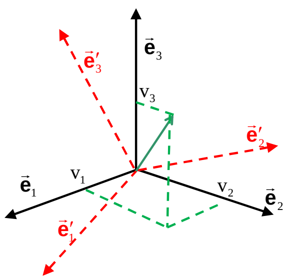


Transformation orthogonales

- Un système de coordonnées définies les *composantes,* v_1, v_2 et v_3, c'est-à-dire que

$$\vec{\mathbf{v}} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$$

Notation matricielle: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$



représentation des composantes du vecteur dans un système de coordonnées

Vecteurs de bases sont orthonormaux, i.e.,

$$\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

est le delta de Kronecker

Notation indicielle

- Considère deux vecteurs

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$$

alors

$$\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i \equiv v_i w_i$$

Convention de sommation (convention dite d'Einstein): un indice répété indique qu'il y a une somme sur cet indice qui est effectuée.

- Un indice répété devant être sommé, il est donc muet et on peut changer sa notation à notre convenance

$$a_{ij} x_j \equiv a_{ik} x_k$$

j   k

Evidemment il est contre-indiqué de remplacer j par i

- Pour annuler la convention de sommation, il suffit de placer l'indice entre parenthèses

$$A_{(i)} \equiv A_{(i)}\mathbf{e}_{(i)}$$

Symbole de permutation de Levi-Civita

- **Définition**

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{autrement: } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i, \end{cases}$$

- **Produit vectoriel**

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

- **Déterminant d'une matrice M**

$$|\mathbf{M}| = d\acute{e}t(\mathbf{M}) = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

- **Propriété: permutation cyclique des indices ne change pas la valeur**

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$$

Exemple d'utilisation du symbole de permutation

- **Propriété:**

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}$$

- **Considérons alors**

$$(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_i = \varepsilon_{ijk} A_j (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k = \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m$$

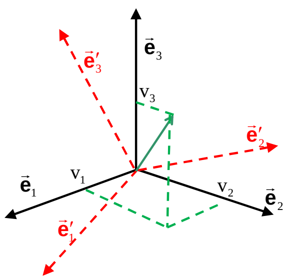
- **En utilisant la propriété ci-dessus, on a**

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))_i &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} A_j B_l C_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= A_j B_i C_j - A_i B_i C_i \\ &\equiv \mathbf{B}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\bullet\mathbf{B})\end{aligned}$$

Dépt. Sciences de la Terre et de l'atmosphère
Université du Québec à Montréal

Transformations orthogonales-1

- **Passage de** $(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) \Rightarrow (\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3)$



Deux bases orthonormales:

$$\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \qquad \mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$$

On exprimer tout vecteur en termes de l'une ou l'autre de ces bases:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathrm{v}_1 \mathbf{e}_1 + \mathrm{v}_2 \mathbf{e}_2 + \mathrm{v}_3 \mathbf{e}_3$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathrm{v}'_1 \mathbf{e}'_1 + \mathrm{v}'_2 \mathbf{e}'_2 + \mathrm{v}'_3 \mathbf{e}'_3$$

Comment peut-on relier ces deux expressions?

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Transformations orthogonales-2

- Exprime les vecteurs $(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)$ en termes des vecteurs $(\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3)$ c'est-à-dire que

$$\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}'_1 + a_{12}\mathbf{e}'_2 + a_{13}\mathbf{e}'_3$$
$$\mathbf{e}_2 = a_{21}\mathbf{e}'_1 + a_{22}\mathbf{e}'_2 + a_{23}\mathbf{e}'_3$$
$$\mathbf{e}_3 = a_{31}\mathbf{e}'_1 + a_{32}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3$$

Conséquemment,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= \mathrm{v}_1 \mathbf{e}_1 + \mathrm{v}_2 \mathbf{e}_2 + \mathrm{v}_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \mathrm{v}_1 \left(a_{11}\mathbf{e}'_1 + a_{12}\mathbf{e}'_2 + a_{13}\mathbf{e}'_3\right) \\ &\quad + \mathrm{v}_2 \left(a_{21}\mathbf{e}'_1 + a_{22}\mathbf{e}'_2 + a_{23}\mathbf{e}'_3\right) \\ &\quad + \mathrm{v}_3 \left(a_{31}\mathbf{e}'_1 + a_{32}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3\right) \\ &= \left(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3\right)\mathbf{e}'_1 + \left(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3\right)\mathbf{e}'_2 + \left(a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3\right)\mathbf{e}'_3 \\ &= \mathrm{v}'_1 \mathbf{e}'_1 + \mathrm{v}'_2 \mathbf{e}'_2 + \mathrm{v}'_3 \mathbf{e}'_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}$$

ou, en notation indicielle

$$\mathrm{v}'_i = a_{ij} v_j$$

Transformations orthogonales-3

- Les vecteurs $(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)$ étant tels que

$$\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}'_1 + a_{12}\mathbf{e}'_2 + a_{13}\mathbf{e}'_3$$
$$\mathbf{e}_2 = a_{21}\mathbf{e}'_1 + a_{22}\mathbf{e}'_2 + a_{23}\mathbf{e}'_3$$
$$\mathbf{e}_3 = a_{31}\mathbf{e}'_1 + a_{32}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3$$

alors $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}'_j = a_{ij}$. Inversement, $(\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3)$ sont tels que

$$\mathbf{e}'_1 = b_{11}\mathbf{e}_1 + b_{12}\mathbf{e}_2 + b_{13}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}'_2 = b_{21}\mathbf{e}_1 + b_{22}\mathbf{e}_2 + b_{23}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}'_3 = b_{31}\mathbf{e}_1 + b_{32}\mathbf{e}_2 + b_{33}\mathbf{e}_3$$

et donc,

$$\mathbf{e}'_i \bullet \mathbf{e}_j = b_{ij} = \mathbf{e}_j \bullet \mathbf{e}'_i = a_{ji}$$

On conclut alors que si

$$\alpha = \left(a_{ij}\right) \quad , \quad \beta = \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) = \alpha^T$$

Transformations orthogonales-4

- Colonnes et lignes d'une matrice orthogonale définissent donc des vecteurs orthogonaux car

$$\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}'_1 + a_{12}\mathbf{e}'_2 + a_{13}\mathbf{e}'_3 \qquad \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_2 = a_{21}\mathbf{e}'_1 + a_{22}\mathbf{e}'_2 + a_{23}\mathbf{e}'_3 \qquad \mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}_3 = a_{31}\mathbf{e}'_1 + a_{32}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3 \qquad \mathbf{e}'_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$$

$$\begin{array}{cc} \alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \ \mathbf{e}'_1 \\ \leftarrow \ \mathbf{e}'_2 \\ \leftarrow \ \mathbf{e}'_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{array} & \end{array}$$

- Conséquemment,

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha^T\alpha = \alpha\alpha^T = \mathbf{I} \\ \left(\alpha^T\alpha\right)_{ij} = \left(\alpha\alpha^T\right)_{ji} = \delta_{ij} \end{array}}$$

Transformations orthogonales-5

- En utilisant la même approche que précédemment, on peut montrer que, puisque

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{e}'_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3$$

alors $\vec{\mathbf{v}} = v'_1\mathbf{e}'_1 + v'_2\mathbf{e}'_2 + v'_3\mathbf{e}'_3$ implique que

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathbf{v} = \alpha^T\mathbf{v}' = \alpha^T\alpha\mathbf{v}$

Conséquemment,
$$\alpha^T\alpha = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \alpha^T = \alpha^{-1}$$

> La matrice α décrivant le changement de variables est une <u>matrice dite orthogonale</u> qui est telle que son inverse $\left(\alpha^{-1}\right)$ correspond à sa transposée $\left(\alpha^T\right)$.

Tenseurs cartésiens

- En effectuant un changement de variables orthogonal décrit par une matrice $\left(\alpha_{ij}\right)$, la définition d'un vecteur doit changer de telle sorte que $v'_i = \alpha_{ij}v_j \quad \left(\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{v}\right)$

  Un vecteur constitue un <u>*tenseur cartésien d'ordre un*</u>.

- Toute quantité dont la définition même n'est pas changée par un changement de coordonnées orthogonal est définie comme un <u>tenseur d'ordre zéro</u> (e.g., champ scalaire comme la pression ou la température).

Tenseur d'ordre 2: première partie

- Considérons maintenant deux vecteurs qui sont reliés par une transformation linéaire:
- $$\mathbf{w} = \mathbf{M}\mathbf{v} \qquad (1)$$
- Si on change de système de coordonnées, alors

$$\mathbf{w}' = \alpha\mathbf{w} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} = \alpha^T\mathbf{w}'$$
$$\mathbf{v}' = \alpha\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \alpha^T\mathbf{v}'$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{M}\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \alpha^T\mathbf{w}' = \mathbf{M}\alpha^T\mathbf{v}'$$

- Conséquemment , en multipliant de part et d'autre par α, on obtient que

$$\alpha\alpha^T\mathbf{w}' = \alpha\mathbf{M}\alpha^T\mathbf{v}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}' = \alpha\mathbf{M}\alpha^T\mathbf{v}'$$

- Dans le nouveau système de coordonnées, (1) s'exprime comme étant

$$\mathbf{w}' = \mathbf{M}'\mathbf{v}' \text{ où } \mathbf{M}' = \alpha\mathbf{M}\alpha^T$$

Tenseur d'ordre 2: deuxième partie

- **En notation indicielle, on a que**

$$M'_{kn} = \alpha_{ki}M_{ij}\alpha_{nj} = \alpha_{ki}\alpha_{nj}M_{ij}$$
$$M'_{kn} = \alpha_{ki}\alpha_{nj}M_{ij}$$

de telle sorte que

$$w'_k = M'_{kn}v'_n$$

alors que

$$w_i = M_{ij}v_j$$

On dit alors que M est un tenseur d'ordre 2 et satisfait la propriété

$$\boxed{M'_{kn} = \alpha_{ki}\alpha_{nj}M_{ij}}$$

Exemple d'application des transformations orthogonales

- Expression de la divergence si $x'_k = \alpha_{kn} x_n$ et $v_i = \alpha_{ki} v'_k$

  Règle de dérivation en chaîne:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x'_k} = \alpha_{ki}\frac{\partial}{\partial x'_k}$$

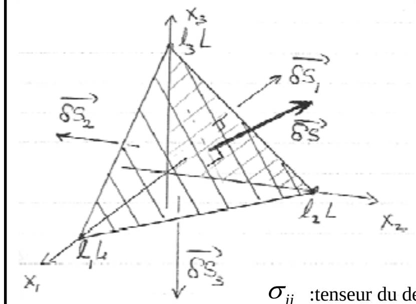
- Expression de la divergence

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \alpha_{ki}\alpha_{li}\frac{\partial v'_k}{\partial x'_l} = \delta_{kl}\frac{\partial v'_k}{\partial x'_l} = \frac{\partial v'}{\partial x'_k}$$

- On conclut donc que dans le nouveau système de coordonnées, on aura que

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial v'_3}{\partial x'_3}$$

Tenseur de stress



$$\mathbf{C}(\mathbf{n}) = n_j\,\mathbf{C}(\mathbf{e}_j)$$

$$C_i(\mathbf{n}) \equiv \sigma_{ij}\, n_j$$

σ_{ij} :tenseur du deuxième ordre appelé tenseur de stress. On interprète chacune des composantes comme étant la i^ème composante de la force de contact qui s'exerce sur un élément de surface orienté perpendiculairement au j^ème axe

Expression pour le tenseur de stress

- La force qui s'exerce sur une face du fluide dépend de la variation de la vitesse du fluide c'est-à-dire que

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl}\frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

- Pour préserver cette relation lors d'un changement de coordonnées, on peut montrer que

$$S'_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}S_{pqrs}$$

  indiquant ainsi que S_{pqrs} est un tenseur d'ordre 4.

Propriétés des tenseurs

- Tenseur d'ordre n

$$A'_{j_1 j_2 \ldots j_N} = \alpha_{j_1 k_1}\,\alpha_{j_2 k_2}\,\ldots\,\alpha_{j_N k_N}\,A_{k_1 k_2 \ldots k_N}$$

- Tenseur est dit isotrope s'il garde la même forme peu importe le système de coordonnées, c'est-à-dire que

$$A'_{j_1 j_2 \ldots j_N} = A_{j_1 j_2 \ldots j_N}$$

  Exemple:

$$\delta'_{ij} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,\delta_{kl} = \alpha_{ik}\,\alpha_{jk} = \delta_{ij}$$

- Tenseur d'ordre 2 est dit antisymétrique si

$$A_{ji} = -A_{ij} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés des tenseurs

- Tenseur antisymétrique d'ordre 2 peut s'exprimer sous la forme.
  $A_{ij} = \epsilon_{ijk}\ \omega_k$ .En effet,

$$\epsilon_{ijk}\ \omega_k = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

  et il suffit de poser que $\omega_3 = A_{12}$ $\omega_2 = -A_{13}$ et $\omega_1 = A_{23}$

- Tenseur symétrique $\left(A_{ji} = A_{ij}\right)$ est tel qu'il existe un système de coordonnées orthogonal tel que, dans ce système,

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

  et λ_1 , λ_2 , et λ_3 sont des nombres réels

Propriétés des tenseurs

- Tout tenseur isotrope d'ordre 4 peut s'exprimer sous la forme

$$A_{ijkl} = c_1 \delta_{ik}\, \delta_{jl} + c_2\ \delta_{il}\, \delta_{jk} + c_3 \delta_{ij}\, \delta_{kl}$$

- La trace d'une matrice est définie comme la somme des éléments de sa diagonale. La trace d'un tenseur est indépendante du système de coordonnées choisi.

$$\begin{aligned} A'_{ii} &= \alpha_{ik}\ \alpha_{il}\ A_{kl} \\ &= \delta_{kl}\ A_{kl} = A_{kk} \end{aligned}$$