

Un modèle atmosphérique simple

- Modèle barotrope (1 seul niveau) utilisé par Charney et von Neumann pour produire une prévision numérique sur ordinateur
- Équation du tourbillon barotrope
 - * Écoulement non-divergent et purement rotationnel

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0 \quad \zeta = \nabla^2 \psi$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$f = f_0 + \beta y$$

- $f = 2\Omega \sin \phi$: paramètre de Coriolis
- $x = a \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0), \quad y = a(\phi - \phi_0)$
- $\beta = (2\Omega/a) \cos \phi_0$: paramètre β représentant la variation du terme de Coriolis avec la latitude

Équations linéarisées

- Considère que

$$\mathbf{v} = U_0 \mathbf{e}_x + \mathbf{v}', \quad \frac{\|\mathbf{v}'\|}{|U_0|} \ll 1$$

- Équations linéarisées

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \underbrace{u' \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + v' \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y}}_{\text{Termes négligés}} = 0$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- On considère ici un problème unidimensionnel en x

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Résolution par une méthode spectrale

- On développe la fonction de Courant ψ en une série de Fourier

* Solution est supposée périodique sur l'intervalle $[0, 2\pi]$

$$\psi(x, t) = b_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k(t) \sin kx + \tilde{b}_k(t) \cos kx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{a}_k(t) \cos kx - k \tilde{b}_k(t) \sin kx$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 (\tilde{a}_k(t) \sin kx + \tilde{b}_k(t) \cos kx)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 \left(\frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} \sin kx + \frac{d\tilde{b}_k(t)}{dt} \cos kx \right)$$

- Conditions initiales:

$$\psi(x, 0) = b_0(0) + \sum (\tilde{a}_k(0) \sin kx + \tilde{b}_k(0) \cos kx) = F(x)$$

Système d'équations différentielles

- Substitution dans l'éq.(1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} -k^2 \frac{d\tilde{a}_k(t)}{dt} \sin kx - k^2 \frac{d\tilde{b}_k(t)}{dt} \cos kx + \underbrace{-k^3 U_0 (\tilde{a}_k(t) \cos kx - \tilde{b}_k(t) \sin kx)}_{U_0 \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x^2}}$$

$$+ \beta k \underbrace{(\tilde{a}_k(t) \cos kx - \tilde{b}_k(t) \sin kx)}_{\beta \frac{\partial \psi}{\partial x}} = 0$$

- Orthogonalité des fonctions $\sin kx$ et $\cos kx$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \pi & k = m \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \pi & k = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos mx \, dx = 0$$

Système d'équations différentielles à résoudre

- En multipliant respectivement par $\sin k_0x$ et $\cos k_0x$ et en intégrant de 0 à 2π , on obtient deux équations différentielles gouvernant l'évolution des coefficients spectraux

$$-k_0^2 \frac{d\tilde{a}_{k_0}(t)}{dt} + (U_0 k_0^3 - \beta k_0) \tilde{b}_{k_0}(t) = 0$$

$$-k_0^2 \frac{d\tilde{b}_{k_0}(t)}{dt} - (U_0 k_0^3 - \beta k_0) \tilde{a}_{k_0}(t) = 0$$

- L'évolution temporelle de chaque composante spectral est déterminée en résolvant les deux équations différentielles

$$\frac{d\tilde{a}_k}{dt} = -\omega \tilde{b}_k \quad \omega(k) = k \left(\frac{\beta}{k^2} - U_0 \right) \quad (2)$$

$$\frac{d\tilde{b}_k}{dt} = +\omega \tilde{a}_k$$

Expression de la solution

- **Solution du système (2):**

$$\tilde{a}_k(t) = \tilde{a}_k(0) \cos \omega t - \tilde{b}_k(0) \sin \omega t$$

$$\tilde{b}_k(t) = \tilde{a}_k(0) \sin \omega t + \tilde{b}_k(0) \cos \omega t$$

- **Solution de l'équation aux dérivées partielles:**

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \tilde{a}_k(t) \sin kx + \tilde{b}_k(t) \cos kx \\ &= (\tilde{a}_k(0) \cos \omega t - \tilde{b}_k(0) \sin \omega t) \sin kx + (\tilde{a}_k(0) \sin \omega t + \tilde{b}_k(0) \cos \omega t) \cos kx \\ &= \tilde{a}_k(0) [\cos \omega t \sin kx + \sin \omega t \cos kx] + \tilde{b}_k(0) [\cos \omega t \cos kx - \sin \omega t \sin kx] \\ &= \tilde{a}_k(0) \sin(kx + \omega t) + \tilde{b}_k(0) \cos(kx + \omega t) \end{aligned}$$

Déplacement d'une onde avec une vitesse de phase c

$$kx + \omega t = k(x - ct) \quad c = U_0 - \frac{\beta}{k^2}$$

Résolution numériques d'équations différentielles ordinaires

- **Systèmes d'équations différentielles** où

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = \begin{pmatrix} F_1(u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ F_2(u_1, u_2, \dots, u_n; t) \\ \vdots \\ F_n(u_1, u_2, \dots, u_n; t) \end{pmatrix}$$

- **Systèmes d'équations différentielles linéaires et**

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Propriétés des systèmes linéaires

- Si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2$$

est également une solution

- On peut trouver un changement de variable

$$\xi = \mathbf{E}\mathbf{u}$$

tel que

$$\mathbf{W} = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}$$

et \mathbf{W} est diagonale par blocs (2 X2) de la forme

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ +\omega & \lambda \end{pmatrix}$$

- Cas général peut toujours se ramener à cette forme

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{E}\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}\xi \equiv \mathbf{W}\xi \quad \therefore \frac{d\xi}{dt} = \mathbf{W}\xi$$

Cas types

- Croissance (amortissement) exponentiel

$$\frac{du}{dt} = au$$

Solution exacte: $u(t) = u_0 e^{at}$

- Solutions oscillatoires

$$\frac{du_1}{dt} = -\omega u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = +\omega u_1$$

Solution exacte:

$$u_1(t) = u_1(0) \cos \omega t - u_2(0) \sin \omega t$$

$$u_2(t) = u_1(0) \sin \omega t + u_2(0) \cos \omega t$$

Schéma par dérivation avant

- Définition de dérivée

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} \right]$$

Pour Δt fini:

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = au(t)$$

$$\therefore u(t + \Delta t) = u(t) + au(t)\Delta t$$

Dans ce cas-ci, en posant $t_n = n \Delta t$:

$$u(t_n + \Delta t) = u(t_n) + a\Delta t u(t_n)$$

$$u_{n+1} = (1 + a\Delta t)u_n$$

Solution numérique: $u_n = u_0(1 + a\Delta t)^n$

Solution analytique: $u(t_n) = u_0 e^{an\Delta t} = u_0 (e^{a\Delta t})^n = u_0 \left(1 + a\Delta t + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} + \dots \right)^n$

Dérivation avant appliquée au cas oscillatoire

- Considère

$$\frac{dX}{dt} = -\omega Y$$

$$\frac{dY}{dt} = +\omega X$$

où $\omega = 2\pi/T$, $T = 72$ hres, $X_0 = 600$ km, $y_0 = 0$.

- Forme discrétisée

$$X_{n+1} = X_n - \omega \Delta t Y_n$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \omega \Delta t X_n$$

- Fig.1: $\Delta t = 0.5$ hres et
 $N = 144$ pas de temps ($t_N = 72$ hres)
- Fig.2: $\Delta t = 0.05$ hres (i.e., 3 minutes)
 $N = 1440$ pas de temps ($t_N = 72$ hres)

Représentation complexe

- $U = u_1 + i u_2$. Donc:

$$u_1 = \text{Re}\{U\} = \frac{(U + U^*)}{2}; \quad u_2 = \text{Im}\{U\} = \frac{(U - U^*)}{2i}$$

Forme complexe des équations différentielles:

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U,$$

$$\frac{dU^*}{dt} = -i\omega U^*$$

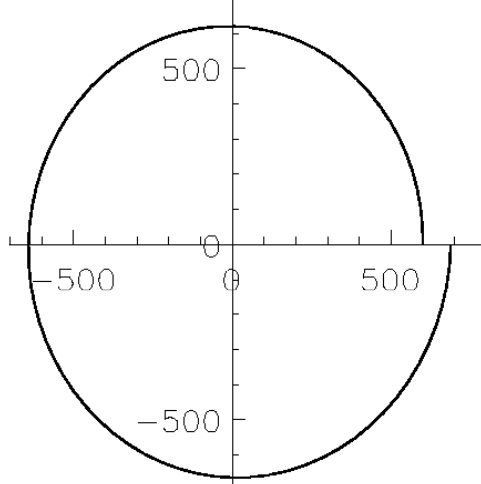
Solution:

$$U(t) = U(0)e^{i\omega t} = (u_1(0) + iu_2(0))[\cos \omega t + i \sin \omega t]$$

$$= [u_1(0) \cos \omega t - u_2(0) \sin \omega t] + i[u_1(0) \sin \omega t + u_2(0) \cos \omega t]$$

$$\equiv u_1(t) + iu_2(t)$$

Intégration avec $\Delta t = 0.5$ hres et $N = 144$ pas de temps ($t_N = 72$ hres)



Intégration avec $\Delta t = 0.05$ hres et $N = 1440$ pas de temps ($t_N = 72$ hres)

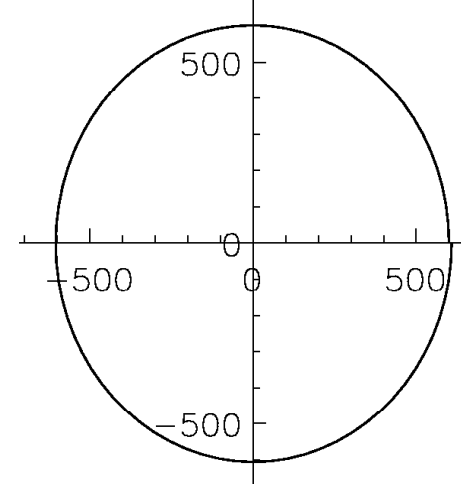


Schéma du deuxième ordre

- Prédicteur-correcteur procédant en deux étapes:

$$u' = u(t) + \frac{1}{2} \Delta t F(u(t), t)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t F(u', t + \Delta t / 2)$$

- Application à l'exemple précédent

$$u' = \left(1 + a \frac{\Delta t}{2}\right) u_{n-1}$$

$$u_n = u_{n-1} + a \Delta t u'$$

$$= \left(1 + a \Delta t + \frac{1}{2} a^2 \Delta t^2\right) u_{n-1}$$

$$= u_0 \left(1 + a \Delta t + \frac{1}{2} a^2 \Delta t^2\right)^n$$

- Comparaison à la solution analytique

$$u(t_n) = u_0 e^{an\Delta t} = u_0 (e^{a\Delta t})^n = u_0 \left(1 + a\Delta t + \frac{1}{2} a^2 \Delta t^2 + \dots\right)^n$$

Prédicteur-correcteur du deuxième ordre avec $\Delta t = 0.5$ hres et $N = 144$ pas de temps ($t_N = 72$ hres)

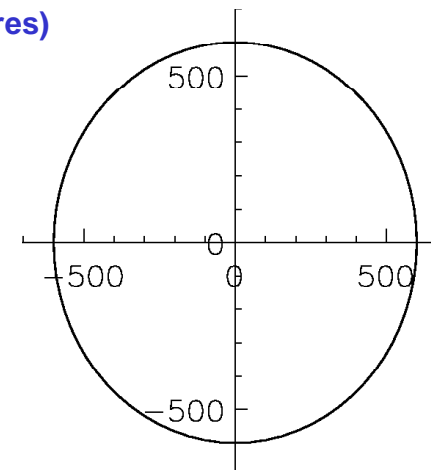


Schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre

• Description

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t F(u(t), t) & p &= \frac{1}{2}(k_1 + k_4) \\ k_2 &= \Delta t F(u + \frac{1}{2}k_1, t + \frac{1}{2}\Delta t) & q &= \frac{1}{2}(k_2 + k_3) \\ k_3 &= \Delta t F(u + \frac{1}{2}k_2, t + \frac{1}{2}\Delta t) & k &= \frac{1}{3}(p + 2q) \\ k_4 &= \Delta t F(u + k_3, t + \Delta t) \end{aligned}$$

• Solution: $u(t+\Delta t) = u(t) + k$

• Application à notre exemple

$$\begin{aligned} k_1 &= a \Delta t u_n & k_1 &= a \Delta t u_n \\ k_2 &= a \Delta t (u_n + \frac{1}{2}k_1) & k_2 &= (a \Delta t + \frac{1}{2}(a \Delta t)^2) u_n \\ k_3 &= a \Delta t (u_n + \frac{1}{2}k_2) & k_3 &= (a \Delta t + \frac{1}{2}(a \Delta t)^2 + \frac{1}{4}(a \Delta t)^3) u_n \\ k_4 &= a \Delta t (u_n + k_3) & k_4 &= (a \Delta t + (a \Delta t)^2 + \frac{1}{2}(a \Delta t)^3 + \frac{1}{4}(a \Delta t)^4) u_n \end{aligned}$$

Solution obtenue avec le schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre

$$\begin{aligned} p &= (a \Delta t + \frac{1}{2}(a \Delta t)^2 + \frac{1}{4}(a \Delta t)^3 + \frac{1}{8}(a \Delta t)^4) u_n \\ q &= (a \Delta t + \frac{1}{2}(a \Delta t)^2 + \frac{1}{8}(a \Delta t)^3) u_n \\ k &= (a \Delta t + \frac{1}{2}(a \Delta t)^2 + \frac{1}{6}(a \Delta t)^3 + \frac{1}{24}(a \Delta t)^4) u_n \\ u_{n+1} &= u_n + k \\ &= (1 + a \Delta t + \frac{1}{2}(a \Delta t)^2 + \frac{1}{6}(a \Delta t)^3 + \frac{1}{24}(a \Delta t)^4) u_n \\ &= (1 + a \Delta t + \frac{1}{2}(a \Delta t)^2 + \frac{1}{6}(a \Delta t)^3 + \frac{1}{24}(a \Delta t)^4)^{n+1} u_0 \end{aligned}$$

- Schéma produit les cinq premiers termes de la série de Taylor.
- Schéma requiert 4 évaluations de la fonction F(u,t)

Instabilité numérique

• Applications des résultats précédents à

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U,$$

* Solution est telle que $|U(t)|^2 = U U^* = |U(0)|^2$.

* Pas de croissance dans le temps

• Schéma avant

$$\begin{aligned} U_n &= (1 + i\omega \Delta t)^n U_0 \\ |U_n|^2 &= U_n \bar{U}_n = |U_0|^2 [(1 + i\omega \Delta t)(1 - i\omega \Delta t)]^n = |U_0|^2 (1 + \omega^2 \Delta t^2)^n > |U_0|^2 \end{aligned}$$

Toute erreur sur les conditions initiales connaîtra une croissance exponentielle

Schéma est dit inconditionnellement instable car

$$(1 + \omega^2 \Delta t^2) > 1$$

Prédicteur-correcteur du deuxième ordre

$$\begin{aligned} U_n &= (1 + i\omega \Delta t - \omega^2 \Delta t^2)^n U_0 \\ |U_n|^2 &= U_n \bar{U}_n = |U_0|^2 \left[\left(1 + i\omega \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \left(1 - i\omega \Delta t - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} \right) \right]^n \\ &= |U_0|^2 \left[\left[\left(1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} \right) + i\omega \Delta t \right] \left[\left(1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} \right) - i\omega \Delta t \right] \right]^n \\ &= |U_0|^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{2} \right)^2 + \omega^2 \Delta t^2 \right]^n \\ &= |U_0|^2 \left(1 + \frac{1}{4} \omega^4 \Delta t^4 \right)^n \end{aligned}$$

- Le schéma est aussi inconditionnellement instable car

$$1 + \frac{1}{4} \omega^4 \Delta t^4 > 1$$

Runge-Kutta du quatrième ordre

• Il suffit de vérifier si

$$X = \left(1 + i\omega\Delta t - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 - i\frac{1}{6}(\omega\Delta t)^3 + \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^4\right) \\ = \left[\left(1 - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 + \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^4\right) + i\left(\omega\Delta t - \frac{1}{6}(\omega\Delta t)^3\right)\right]$$

est tel que

$$|X|^2 = \left[\left(1 - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 + \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^4\right)^2 + \left(\omega\Delta t - \frac{1}{6}(\omega\Delta t)^3\right)^2\right] \\ = 1 - \frac{\omega^6 \Delta t^6}{24^2} (8 - \omega^2 \Delta t^2) \leq 1$$

Schéma est conditionnellement stable en autant que

$$\omega\Delta t \leq 2\sqrt{2} \cong 2.83$$

Schéma-arrière d'Euler

• Prédicteur-correcteur procédant en deux étapes:

$$u' = u(t) + \Delta t F(u(t), t)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t F(u', t + \Delta t)$$

* Utilisation de $F(u(t+\Delta t), t+\Delta t)$ pour obtenir du/dt en t .

* Système implicite pour obtenir $u(t+\Delta t)$.

• Application au cas oscillatoire

$$u' = (1 + i\omega \Delta t) u_n$$

$$u_{n+1} = u_n + i\omega \Delta t u'$$

$$= (1 + i\omega \Delta t - \omega^2 \Delta t^2) u_n$$

Taux d'amplification

$$|X|^2 = \left[\left(1 - \omega^2 \Delta t^2\right)^2 + \omega^2 \Delta t^2\right] = 1 - \omega^2 \Delta t^2 + \omega^4 \Delta t^4 \\ = 1 - \omega^2 \Delta t^2 (1 - \omega^2 \Delta t^2)$$

Solution est conditionnellement stable en autant que $\omega\Delta t \leq 1$

Schéma implicite de Crank-Nicholson

Schéma implicite

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{\Delta t}{2} [F(u(t + \Delta t), t + \Delta t) + F(u(t), t)]$$

Application à $du/dt = i\omega u$.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{i\omega\Delta t}{2} [u_{n+1} + u_n]$$

$$u_{n+1} \left(1 - \frac{i\omega\Delta t}{2}\right) = u_n \left(1 + \frac{i\omega\Delta t}{2}\right)$$

$$u_{n+1} = \frac{\left(1 + \frac{i\omega\Delta t}{2}\right)}{\left(1 - \frac{i\omega\Delta t}{2}\right)} u_n = \frac{(1 - \omega^2 \Delta t^2 / 4) + i\omega\Delta t}{1 + \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}} u_n = X u_n$$

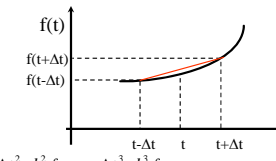
Critère de stabilité

$$r^2 = XX^* = \frac{(1 - \omega^2 \Delta t^2 / 4)^2 + \omega^2 \Delta t^2}{\left[1 + \omega^2 \Delta t^2 / 4\right]^2} = \frac{\left[1 + \omega^2 \Delta t^2 / 4\right]^2}{\left[1 + \omega^2 \Delta t^2 / 4\right]^2} = 1$$

Schéma est inconditionnellement stable

Schéma saute-mouton (ou "leap-frog")

• Dérivée centrée



$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t \frac{df}{dt}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 f}{dt^2}(t) + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 f}{dt^3}(t) + O(\Delta t^4)$$

$$f(t - \Delta t) = f(t) - \Delta t \frac{df}{dt}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 f}{dt^2}(t) - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 f}{dt^3}(t) + O(\Delta t^4)$$

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

• Schéma saute-mouton $u(t + \Delta t) = u(t - \Delta t) + 2\Delta t F(u(t), t)$

• Cas oscillatoire: $u_{n+1} = u_{n-1} + 2i\omega\Delta t u_n$

• Traitement spécial pour le premier pas de temps

Analyse de stabilité de von Neumann

Considère une solution de la forme $u_n = u_0 e^{i\Omega n \Delta t}$

$$u_{n+1} - u_{n-1} = u_0 (e^{i(n+1)\Omega \Delta t} - e^{i(n-1)\Omega \Delta t}) = 2i\omega \Delta t u_0 e^{i\Omega n \Delta t}$$

$$\Rightarrow e^{i\Omega \Delta t} - e^{-i\Omega \Delta t} = 2i\omega \Delta t$$

$$\Rightarrow \sin \Omega \Delta t = \omega \Delta t$$

Solution existe en autant que $\omega \Delta t \leq 1$.

Posons que $X = e^{i\Omega \Delta t}$

$$e^{i\Omega \Delta t} - e^{-i\Omega \Delta t} = 2i\omega \Delta t$$

$$X - \frac{1}{X} = 2i\omega \Delta t$$

$$X^2 - (2i\omega \Delta t)X - 1 = 0$$

Critère de stabilité

On a donc que $X = e^{i\Omega \Delta t}$ $X^2 - (2i\omega \Delta t)X - 1 = 0$

Deux solutions

$$e^{i\Omega \Delta t} \equiv X_+ = i\omega \Delta t + \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2} \quad e^{-i\Omega \Delta t} \equiv X_- = i\omega \Delta t - \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2}$$

Critère de stabilité:

$$u_{n+1} = Xu_n$$

$$XX^* = r^2 = (i\omega \Delta t \pm \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2})(i\omega \Delta t \pm \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2})^*$$

Deux cas: $\omega \Delta t \leq 1$ $XX^* = 1$

$$\omega \Delta t > 1 \quad X_+ X_+^* = (\omega \Delta t + \sqrt{\omega^2 \Delta t^2 - 1})^2 > \omega^2 \Delta t^2 > 1$$

Conditionnellement stable en autant que $\omega \Delta t \leq 1$

Mode computationnel

Solution générale est une combinaison de ces deux solutions

$$u_n = A_1 X_+^n + A_2 X_-^n$$

$$u_0 = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{u_0 X_- - u_1}{(X_- - X_+)}$$

$$u_1 = A_1 X_+ + A_2 X_- \quad A_2 = \frac{u_1 - u_0 X_+}{X_- - X_+}$$

Premier pas de temps par différence avant: $u_1 = u_0(1 + i\omega \Delta t)$

Donc: $u_0 X_- - u_1 = -u_0(1 + \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2})$ $u_1 - u_0 X_+ = u_0(1 - \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2})$

$$X_- - X_+ = -2\sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2}$$

Coefficients A_1 et A_2 sont:

$$A_1 = u_0 \frac{(1 + \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2})}{2\sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2}} \quad A_2 = -u_0 \frac{(1 - \sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2})}{2\sqrt{1 - \omega^2 \Delta t^2}}$$

Mode computationnel (suite)

Dans la limite où $\omega \Delta t \ll 1$, on a

$$A_1 \approx u_0 \quad A_2 \approx -u_0 \frac{\omega^2 \Delta t^2}{4}$$

De plus,

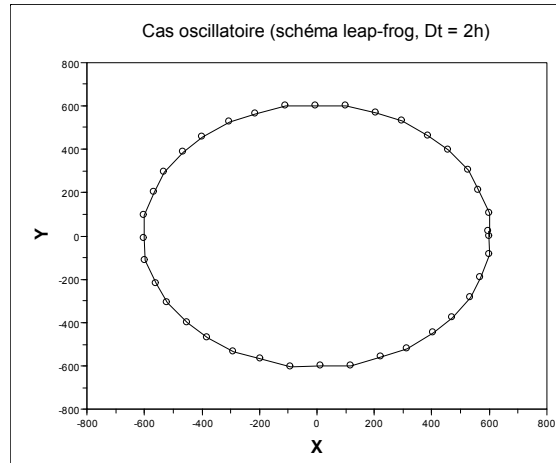
$$X_+ \approx 1 + i\omega \Delta t - \frac{1}{2}\omega^2 \Delta t^2 \quad X_- \approx -(1 - i\omega \Delta t - \frac{1}{2}\omega^2 \Delta t^2)$$

Solution complète est donc

$$u_n = u_0 (1 + i\omega \Delta t - \frac{1}{2}\omega^2 \Delta t^2)^n - \frac{1}{4}\omega^2 \Delta t^2 u_0 (-1)^n (1 - i\omega \Delta t - \frac{1}{2}\omega^2 \Delta t^2)^n$$

- * Premier terme est le mode physique qui oscille à la fréquence de la solution
- * Deuxième terme est appelé *mode computationnel* qui est initialement de petite amplitude
- * Mode computationnel change de signe à chaque pas de temps

Intégration du cas oscillatoire avec $\Delta t = 2h$



Variation de l'amplitude relative $\frac{|A(t)|^2}{|A(0)|^2}$

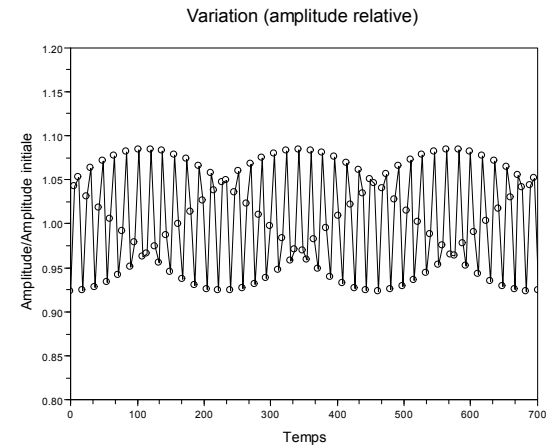
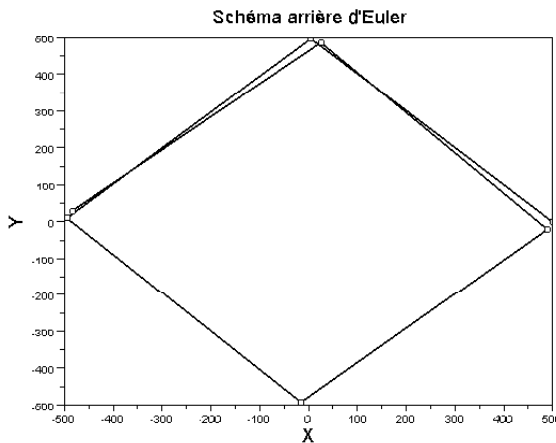
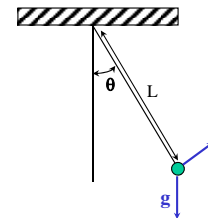


Schéma arrière d'Euler ($\omega\Delta t = 1$)



Application au mouvement du pendule



Equations du mouvement

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{L}$$

Mouvement de petite amplitude

$$\theta \ll \theta^3 \Rightarrow \sin \theta \cong \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Solution: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\Omega t) + \frac{v_0}{\sqrt{gL}} \sin \Omega t$

où $\Omega = 2\pi/T = \sqrt{g/L}$

Conservation de l'énergie

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + mgL(+\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = mv(-g \sin \theta) + mgL(+\sin \theta) \frac{v}{L} = 0$$

ceci implique que

$$E_{tot}(0) = E_{tot}(t)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2(t) + mgL(1 - \cos \theta(t))$$

SCA-4011: Modélisation numérique appliquée aux écoulements géophysiques

UQAM 2010

Intégration de ces équations

- Paramètres: $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ $L = 0.9 \text{ m}$, $\theta_0 = 0$, $\Delta t = 0.02$

* Fréquence lorsque $\theta \ll 1$: $T = 2\pi / (g/L)^{1/2} \sim 1.88 \text{ s}$

- Energie totale au point d'équilibre:

$$E(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2(t) + mgL(1 - \cos \theta(t))$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgL$$

$$\therefore v_0 = 2\sqrt{gL} = 6.0 \text{ ms}^{-1}$$

Ceci correspond au premier cas présenté dans les notes de A. Robert.

- Solution avec le schéma du saute-mouton

Notation: $v_k = v(t_k)$ et $\theta_k = \theta(t_k)$

Premier pas de temps (schéma avant)

$$v_1 = v_0 - \Delta t g \sin \theta_0$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \Delta t v_0 / L$$

Autres pas de temps (saute-mouton)

$$v_2 = v_0 - 2\Delta t g \sin \theta_1$$

$$\theta_2 = \theta_0 + 2\Delta t \frac{v_1}{L}$$

$$v_3 = v_1 - 2\Delta t g \sin \theta_2$$

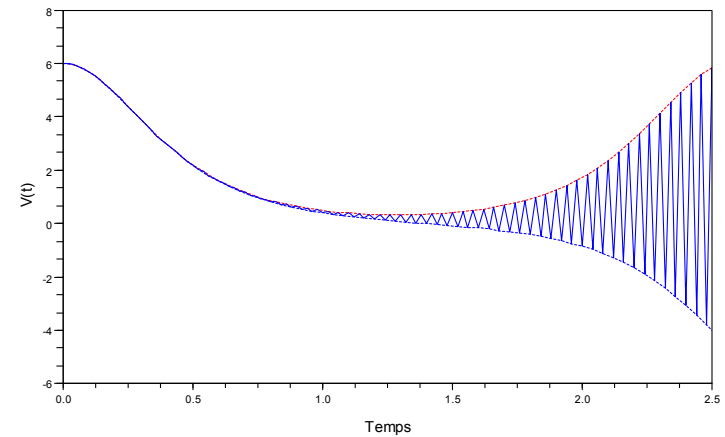
$$\theta_3 = \theta_1 + 2\Delta t \frac{v_2}{L}$$

$$v_4 = v_2 - 2\Delta t g \sin \theta_3$$

$$\theta_4 = \theta_2 + 2\Delta t \frac{v_3}{L}$$

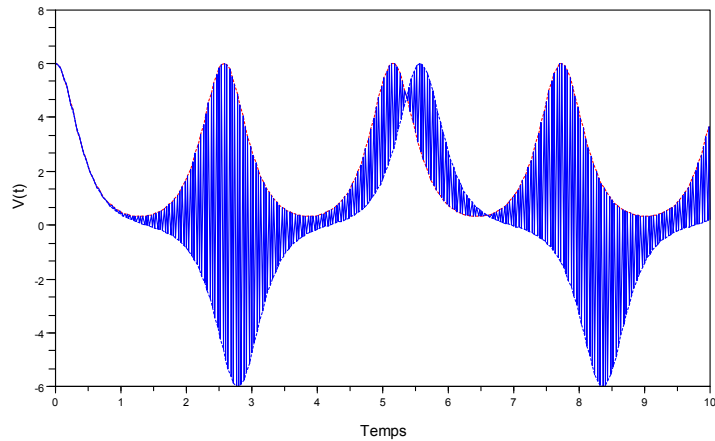
Pendule: $\Delta t = 0.02$, $V(0) = 6$.

Emergence du mode computationnel



Pendule: $\Delta t = 0.02$, $V(0) = 6$.

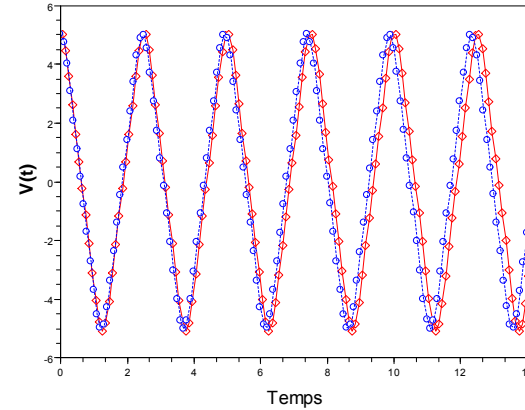
Emergence du mode computationnel



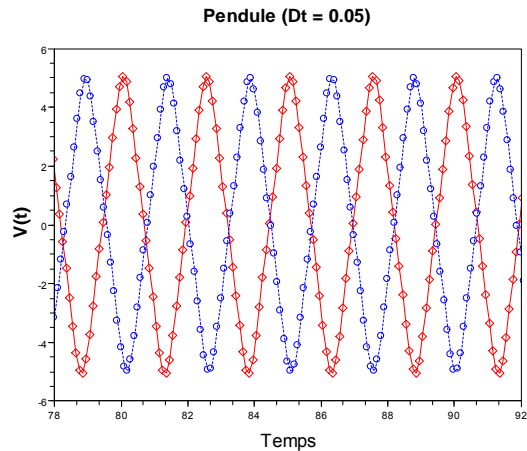
Solution du problème du pendule

($\Delta t = 0.05$, $V(0) = 5$.)

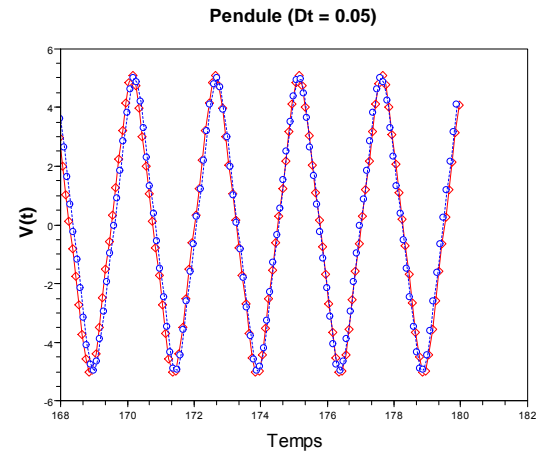
Pendule (Dt = 0.05)



Solution du problème du pendule
 ($\Delta t = 0.05$, $V(0) = 5.$)



Solution du problème du pendule
 ($\Delta t = 0.05$, $V(0) = 5.$)



Élimination du mode computationnel

• **Émergence du mode computationnel**

* relié à la façon dont on démarre l'intégration en effectuant le premier pas de temps avec un schéma par dérivation avant

• **Deux approches avec démarrages différents**

* Démarrage avec Runge-Kutta

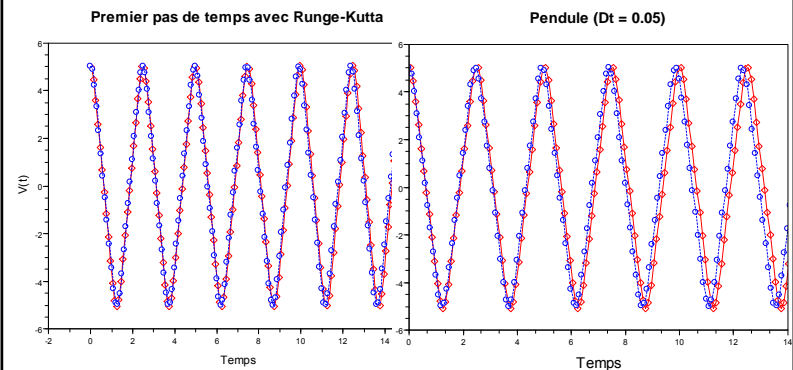
* Démarrage avec un pas de temps $\Delta t/2$ avec le schéma par dérivation avant, suivi d'une application du schéma du saute-mouton pour générer l'état au temps $t+\Delta t$ (schéma du deuxième ordre)

$$u(\Delta t / 2) = u_{1/2} = u_0 + \frac{\Delta t}{2} F(u_0, 0)$$

$$u_1 = u_0 + \Delta t F(u_{1/2}, \Delta t / 2)$$

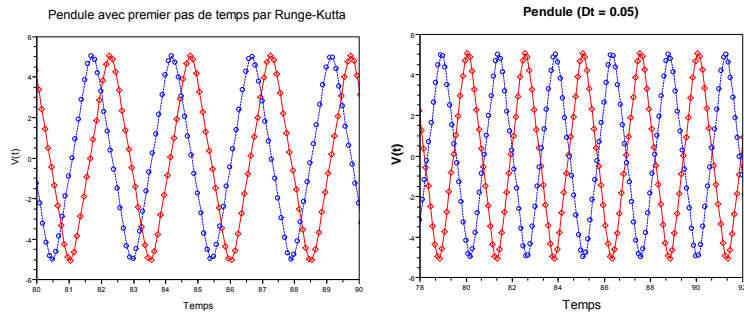
$$u_2 = u_0 + 2\Delta t F(u_1, \Delta t)$$

Premier pas de temps avec Runge-Kutta $0 < t < 14$

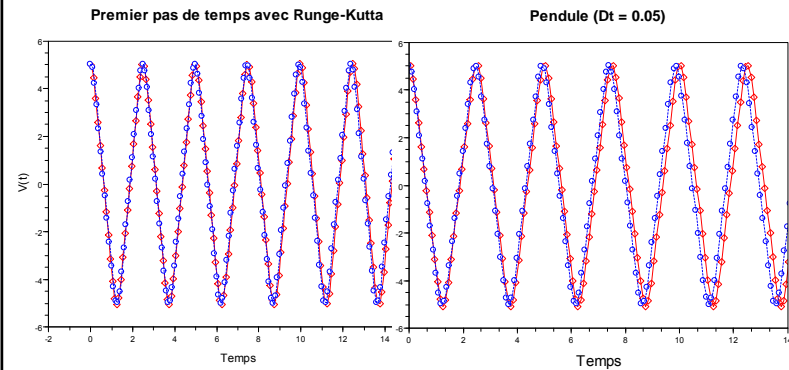


SCA-4011: Modélisation numérique appliquée aux écoulements géophysiques UQAM 2010

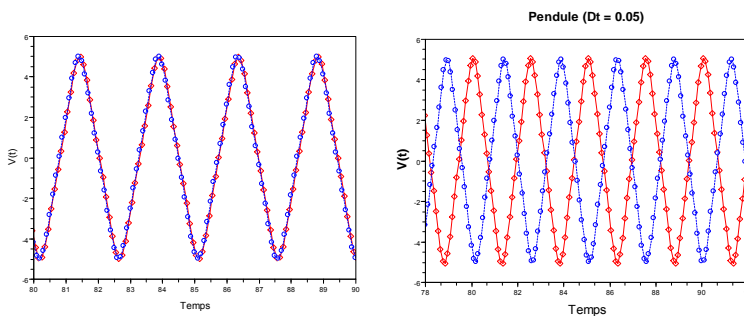
Premier pas de temps avec Runge-Kutta $0 < t < 14$



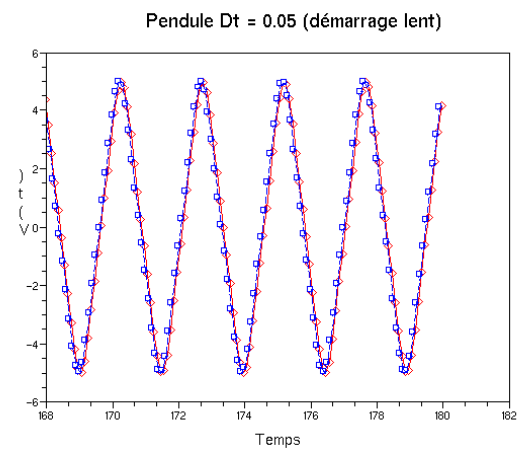
Premier pas de temps: démarrage lent saute-mouton $0 < t < 14$



Premier pas de temps: démarrage lent saute-mouton $80 < t < 90$



Premier pas de temps: démarrage lent saute-mouton $170 < t < 180$



Filtrage du mode computationnel

- **Filtre temporel de Robert-Asselin**

$$u_{n+1}^* = u_{n-1} + 2\Delta t F(u_n, t_n)$$

$$u_n = u_n^* + \alpha(u_{n+1}^* + u_{n-1} - 2u_n^*)$$

- **Élimination du mode computationnel**

* Amortissement de la solution physique par contre

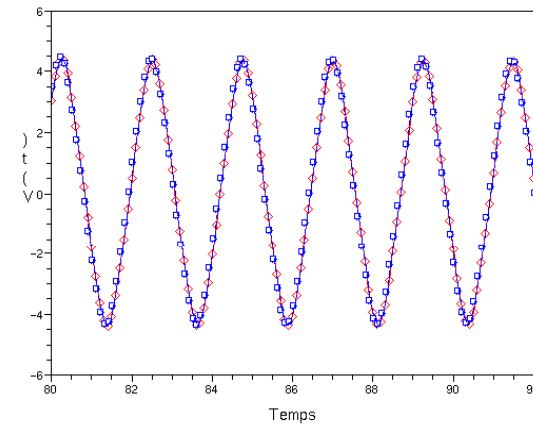
- **Exemple (voir notes de cours)**

* $\alpha = 0.01$

* Application d'un filtre conduit à un amortissement de l'oscillation

Intégration avec le filtre de Robert-Asselin

Intégration avec le filtre de Robert-Asselin



Traitement de la dissipation et de la friction

- **Considère la cas amorti**

$$\frac{du}{dt} = -au$$

- **Recherche de solution de la forme $X = \exp(\alpha t)$**

* Schéma du saute-mouton donne que

$$X^n = \exp(\alpha \Delta t)^n$$

$$X^2 + 2a\Delta t X - 1 = 0$$

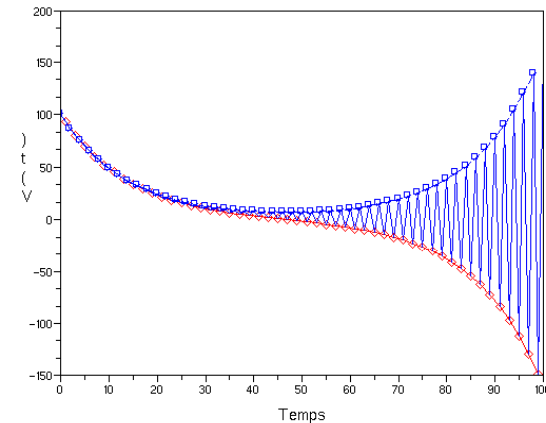
$$X_1 = \sqrt{1 + a^2 \Delta t^2} - a\Delta t$$

$$X_2 = -\sqrt{1 + a^2 \Delta t^2} - a\Delta t$$

• On peut montrer que $|X_2| > 1$

Cas amorti avec le schéma du saute-mouton

Intégration du cas amorti avec le schéma du saute-mouton



Systèmes oscillatoires amortis

$$\frac{du}{dt} = i\omega u + ru$$

• **Schéma saute-mouton**

* stable pour le cas oscillatoire

* instable pour le cas amorti.

• **Schéma avant $u_{n+1} = u_n + \Delta t F(u_n, t_n)$**

* instable pour le cas oscillatoire

* stable pour le cas amorti

• **Algorithme pour les systèmes mixtes:**

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}}{2\Delta t} = i\omega u(t) + ru(t - \Delta t)$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2i\omega \Delta t u_n + 2(\Delta t)ru_{n-1}$$

$$u_{n+1} = Xu_n$$

Systèmes oscillatoires amortis

Étude de stabilité:

* Δt suffisamment petit

$$X = \frac{1}{X} + 2i\omega\Delta t + 2r\Delta t \frac{1}{X} \Rightarrow X^2 - 2i(\omega\Delta t)X - (1 + 2r\Delta t) = 0$$

$$X_{\pm} = i\omega\Delta t \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4\omega^2\Delta t^2 + 4(1 + 2r\Delta t)} = i\omega\Delta t \pm \sqrt{(1 + 2r\Delta t) - \omega^2\Delta t^2}$$

$$|X_{\pm}| = \omega^2\Delta t^2 + (1 + 2r\Delta t) - \omega^2\Delta t^2 = 1 + 2r\Delta t$$

Cas amorti: $r < 0$ et $|X| < 1$

Conclusion

• **Critères d'évaluation des algorithmes**

* Précision de la solution numérique par comparaison à la solution exacte

* Stabilité: algorithmes instables conduisent à une amplification de l'erreur initiale

→ Solution numérique perd de sa précision au cours de l'intégration

→ Cas linéaire: erreur est gouvernée par la même équation

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{E}) = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{E})$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{E}$$

* Prédictibilité de la solution: différences initiales conduisent à des solutions complètement différentes lorsque la période d'intégration excède la *limite de prédictibilité*

* Efficacité: réduire le nombre de calculs devant être effectués