

Advection 1D

Forme la plus simple: advection passive d'un champ $F(x,t)$ par un vent constant U_0

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U_0 \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Conditions initiales: $F(x,0) = f_0(x)$

Solution: $F(x,t) = f_0(x - U_0 t) = f_0(\xi)$

où $\xi = x - U_0 t$

Dérivation en chaîne:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df_0}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df_0}{d\xi} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{df_0}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -U_0 \frac{df_0}{d\xi}$$

ce qui implique que $\frac{\partial F}{\partial t} + U_0 \frac{\partial F}{\partial x} = -U_0 \frac{\partial F}{\partial x} + U_0 \frac{\partial F}{\partial x} = 0$

Remarque: ceci n'est vrai que si U_0 est constant

Méthode spectrale

- Considère que $F(x,t)$ est défini sur intervalle L et est périodique ($F(x+L, t) = F(x,t)$) et $0 \leq x \leq L$
- Représentation en série de Fourier de $F(x,t)$

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_n(t) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\left(\frac{2\pi}{L}\right) \tilde{f}_n(t) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{f}_n}{dt}(t) e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

Méthode spectrale

Forme spectrale de l'équation:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d\tilde{f}_n}{dt} + inKU_0 \tilde{f}_n \right] e^{inKx} = 0 \implies \tilde{f}_n(t) = \tilde{f}_n(0) e^{-inKU_0 t}$$

où $K = 2\pi/L$

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_n(0) e^{inK(x-U_0 t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_n(0) e^{inK\xi} = f_0(x - U_0 t)$$

Méthode spectrale

- * Résolution d'une équation aux dérivées partielles est ramenée à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\tilde{\mathbf{f}}}{dt} = i\mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}}$$

où $\tilde{\mathbf{f}}$ est un vecteur formé des composantes spectrales pour $|n| < N$

- * Dans ce cas-ci, \mathbf{A} est une matrice diagonale dont les éléments sont $inKU_0$ (différent pour chacune des composantes spectrales)
- * Résolution en utilisant l'un ou l'autre des schémas du chapitre précédent (e.g., Runge-Kutta, saute-mouton)
- * Solution est obtenue en prenant la transformée de Fourier inverse

Transformée de Fourier

• Transformée de Fourier réelle

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos n \frac{2\pi}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin n \frac{2\pi}{L} x$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(n \frac{2\pi}{L} x \right) dx \quad \tilde{b}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(n \frac{2\pi}{L} x \right) dx$$

• Forme complexe de la transformée de Fourier et son inverse

$$\cos n \frac{2\pi}{L} x = \frac{e^{in\frac{2\pi}{L}x} + e^{-in\frac{2\pi}{L}x}}{2} \quad \sin n \frac{2\pi}{L} x = \frac{e^{in\frac{2\pi}{L}x} - e^{-in\frac{2\pi}{L}x}}{2i}$$

donne que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{a}_n - i\tilde{b}_n)}{2} e^{in\frac{2\pi}{L}x} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{a}_n + i\tilde{b}_n)}{2} e^{-in\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{in\frac{2\pi}{L}x}$$

où

$$\tilde{c}_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(\tilde{a}_n - i\tilde{b}_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(\tilde{a}_n + i\tilde{b}_n) & n < 0 \\ a_0 / 2 & n = 0 \end{cases} \quad \tilde{c}_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-in\frac{2\pi}{L}x} dx$$

Conjugué complexe de c_n : $\tilde{c}_{-n} = \tilde{c}_n^*$

Forme discrétisée de la transformée de Fourier

• Considérons que $x_k = k\Delta x$ pour $k = 1, \dots, K$ et que nous avons **N composantes spectrales (i.e 2N + 1 coefficients réels)**:

$$F(x_k) = \sum_{n=-N}^{+N} \tilde{c}_n e^{in\frac{2\pi}{L}k\Delta x} = \sum_{n=-N}^{+N} \tilde{c}_n e^{i\frac{2\pi}{K}nk}$$

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{L} \int_0^L F(x) e^{-in\frac{2\pi}{L}x} dx = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K F_k e^{-in\frac{2\pi}{K}k}$$

en définissant $\Delta x = \frac{L}{K}$

• Nous allons maintenant montrer que la forme discrète est exacte

Forme discrétisée de la transformée de Fourier

• Forme discrète est exacte

Substitue l'expression pour F_k dans celle de c_n pour obtenir

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{-i\frac{2\pi}{K}kn} \sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{c}_{n'} e^{i\frac{2\pi}{K}n'k}$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{c}_{n'} \sum_{k=1}^K e^{i\frac{2\pi}{K}(n'-n)k} = \frac{1}{K} \sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{c}_{n'} \sum_{k=1}^K \lambda^k = \frac{1}{K} \sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{c}_{n'} \left[\frac{\lambda(\lambda^K - 1)}{(\lambda - 1)} \right]$$

en utilisant l'expression pour la série géométrique lorsque $n \neq n'$

$$\sum_{k=1}^K \lambda^k = \frac{\lambda(1 - \lambda^K)}{1 - \lambda}$$

$$\lambda = e^{i\frac{2\pi}{K}(n'-n)} \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda^K = 1 - e^{i2\pi(n'-n)} = 0$$

Transformée de Fourier discrète

• Si $n \neq n'$, la somme intérieure s'annule mais si $n=n'$, on obtient que

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{K} \sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{c}_{n'} \sum_{k=1}^K e^{i\frac{2\pi}{K}(n-n')k}$$

$$= \frac{1}{K} \tilde{c}_n \sum_{k=1}^K 1$$

$$= \frac{1}{K} \tilde{c}_n K = \tilde{c}_n$$

Transformée inverse de Fourier discrète

• Transformée discrète inverse est également exacte

Substitue l'expression pour c_n dans celle de $F(x_k)$

$$\begin{aligned}
 F_k &= \sum_{n=-N}^{+N} \tilde{c}_n e^{i\frac{2\pi}{K}nk} = \sum_{n=-N}^{+N} e^{i\frac{2\pi}{K}nk} \frac{1}{K} \sum_{k'=1}^K F_{k'} e^{-in\frac{2\pi}{K}k'} \\
 &= \frac{1}{K} \sum_{k'=1}^K F_{k'} \sum_{n=-N}^{+N} e^{in\frac{2\pi}{K}(k-k')} \\
 &= \frac{1}{K} \sum_{k'=1}^K F_{k'} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{+N} e^{in\frac{2\pi}{K}(k-k')} + \sum_{n=1}^{+N} e^{-in\frac{2\pi}{K}(k-k')} \right\} \\
 &= \frac{1}{K} \sum_{k'=1}^K F_{k'} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \lambda^n + \sum_{n=1}^N (1/\lambda)^n \right\}
 \end{aligned}$$

en définissant $\lambda = e^{-i\frac{2\pi}{K}(k-k')}$

Transformée inverse de Fourier discrète

Pour $k \neq k'$, l'expression entre crochets comprend deux séries géométriques:

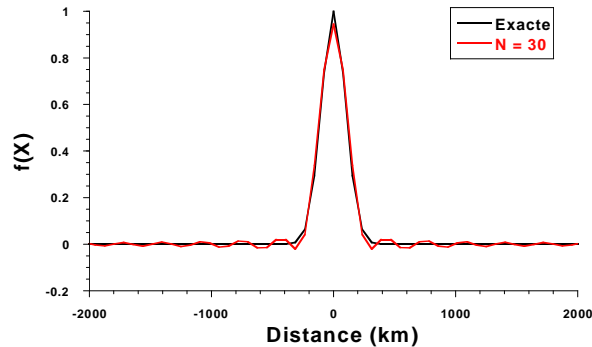
$$\begin{aligned}
 1 + \sum_{n=1}^N \lambda^n + \sum_{n=1}^N (1/\lambda)^n &= 1 + \frac{\lambda(\lambda^N - 1)}{(\lambda - 1)} + \frac{(\lambda^N - 1)}{\lambda^N(\lambda - 1)} \\
 &= \frac{\lambda^N(\lambda - 1) + \lambda^{N+1}(\lambda^N - 1) + \lambda^N - 1}{\lambda^N(\lambda - 1)} \\
 &= \frac{\lambda^{2N+1} - 1}{\lambda^N(\lambda - 1)}
 \end{aligned}$$

Si $K = 2N+1$, alors

$$\lambda^{2N+1} = e^{i\left(\frac{2\pi}{K}\right)(k-k')(2N+1)} = e^{i2\pi(k-k')} = 1$$

Dans ce cas, la transformée inverse est également exacte!!

Représentation spectrale d'une fonction gaussienne



Résumé

• Transformée de Fourier discrétisée est exacte à la condition que

- * $F(x_k)$ soit représentée par une série de Fourier tronquée à l'ordre N
- * Nombre de points de grille $K \geq 2N+1$.
- * Les formes discrètes de la transformée et de son inverse deviennent alors exacte.

• Erreur de troncature

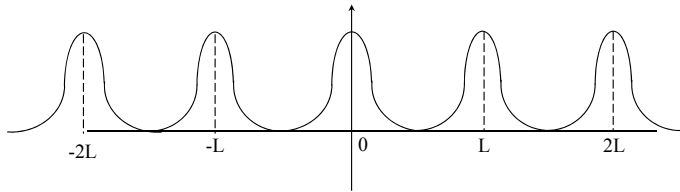
- * Fonction nécessite une infinité de composantes et l'erreur correspond alors à la somme des composantes tronquées.
- * En général, en prenant une troncature suffisamment élevée, on peut réduire l'erreur pour atteindre la précision désirée.

• Méthode spectrale

- * Evaluation exacte des dérivées en autant que $F(x,t)$ puisse être représentée à l'intérieur de la troncature N .

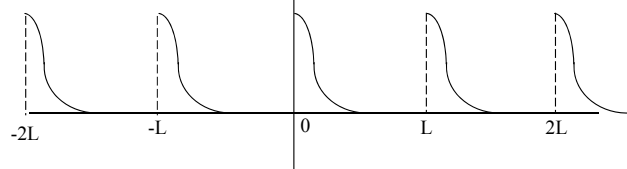
Quelques remarques sur les séries de Fourier

- Fonction est considérée périodique pour $-\infty \leq x \leq \infty$

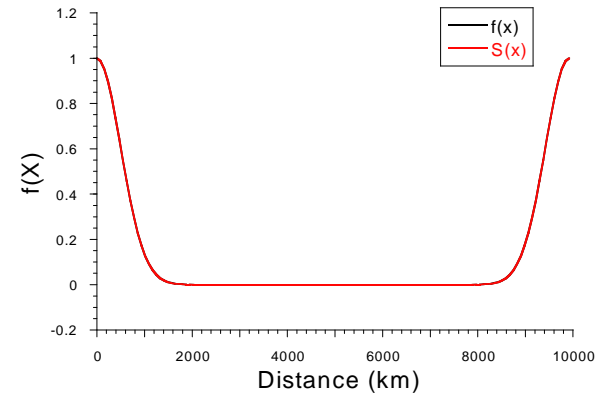


- Phénomène de Gibbs

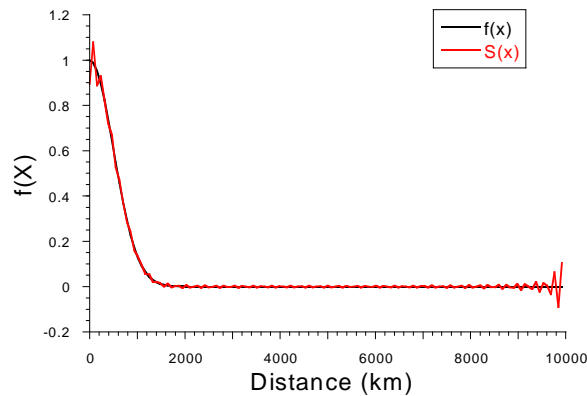
* Impossibilité de représenter une fonction discontinue à l'aide d'une série de Fourier



Représentation périodique



Représentation non-périodique



Stabilité du schéma saute-mouton appliqué à la méthode spectrale

Equation spectrale:

$$\frac{d\tilde{f}_n}{dt} + in \frac{2\pi}{K\Delta x} U_0 \tilde{f}_n = 0$$

Critère de stabilité:

$$\omega\Delta t = n \frac{2\pi}{K\Delta x} U_0 \Delta t \leq 1$$

$$\frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{K}{N2\pi}$$

Exemple des notes:

$$K = 101, N = 30$$

$$\frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{101}{2\pi \times 30} \approx 0.536$$

• **Vitesse de phase numérique:**

vitesse de phase numérique plus rapide que celle de l'écoulement

$$\sin \Omega \Delta t \approx \Omega \Delta t - \frac{1}{6} (\Omega \Delta t)^3 = \omega \Delta t = k U_0 \Delta t$$

$$\Omega \approx \omega + \frac{1}{6} \omega \Delta t^2 = k U_0 \left(1 + \frac{\Delta t^2}{6}\right)$$

Méthode spectrale

Considère maintenant l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u = g(x)$$

Représentation spectrale de $u(x,t)$ tronquée à l'ordre N

$$u(x,t) = \sum_{n=-N}^{+N} U_n(t) e^{i \frac{2\pi}{K} nk}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=-N}^{+N} in \frac{2\pi}{L} U_n e^{i \frac{2\pi}{K} nk}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=-N}^{+N} \frac{dU_n}{dt} e^{i \frac{2\pi}{K} nk}$$

Représentation exacte du terme non linéaire nécessite $(2N+1)$ composantes.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\sum_{n=-N}^{+N} U_n e^{i \frac{2\pi}{K} nk} \right] \left[\sum_{n'=-N}^{+N} in' \frac{2\pi}{L} U_{n'} e^{i \frac{2\pi}{K} n'k} \right] = \sum_{n=-2N}^{+2N} d_n e^{i \frac{2\pi}{K} nk}$$

Représentation exacte de ce terme n'est donc possible que si le nombre de points de grille $K = 2(2N) + 1 = 4N+1$.

Méthode spectrale directe avec coefficients d'interaction

• Calcul de la forme explicite des équations différentielles

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=-2N}^{+2N} \tilde{d}_n e^{i \frac{2\pi}{K} nk} = \left[\sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{U}_{n'} e^{i \frac{2\pi}{K} n'k} \right] \left[\sum_{n''=-N}^{+N} in'' \frac{2\pi}{K \Delta x} \tilde{U}_{n''} e^{i \frac{2\pi}{K} n''k} \right]$$

• Applique la transformée de Fourier de part et d'autre:

$$\tilde{d}_n = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{-in 2\pi k / K} \left(\sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{U}_{n'} e^{i(2\pi/K)n'k} \right) \left(\sum_{n''=-N}^{+N} in'' \tilde{U}_{n''} \frac{2\pi}{K \Delta x} e^{in''(2\pi/L)n''k} \right)$$

$$= \sum_{n''=-N}^{+N} in'' \tilde{U}_{n''} \frac{2\pi}{K \Delta x} \sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{U}_{n'} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{i(2\pi/L)k(n'+n''-n)} \right)$$

Méthode spectrale directe avec coefficients d'interaction (suite)

$$\tilde{d}_n = \sum_{n''=-N}^{+N} in'' \tilde{U}_{n''} \frac{2\pi}{L} \sum_{n'=-N}^{+N} \tilde{U}_{n'} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{i(2\pi/L)k(n'+n''-n)} \right)$$

$$= \sum_{n'=-N}^{+N} i(n-n') \tilde{U}_{n-n'} \tilde{U}_{n'} \frac{2\pi}{L}$$

- Précalcul et sauvegarde de "n" coefficients d'interaction par équation.
- Calcul et multiplication des $U_n U_{n'}$ devient vite très laborieuse

Aliasing ou repliement spectral

• Considère une onde de longueur d'onde $n = N_0 + l$ où le nombre de points de grille $K = 2N_0 + 1$.

$$F(x_k) = F_k = e^{i(N_0+l) \frac{2\pi}{K} k}$$

$$= e^{i[2N_0+1-(N_0+1-l)] \frac{2\pi}{K} k} = e^{i[K-(N_0+1-l)] \frac{2\pi}{K} k}$$

$$= e^{iK \frac{2\pi}{K} k} e^{-i(N_0+1-l) \frac{2\pi}{K} k}$$

$$= e^{-i(N_0+1-l) \frac{2\pi}{K} k}$$

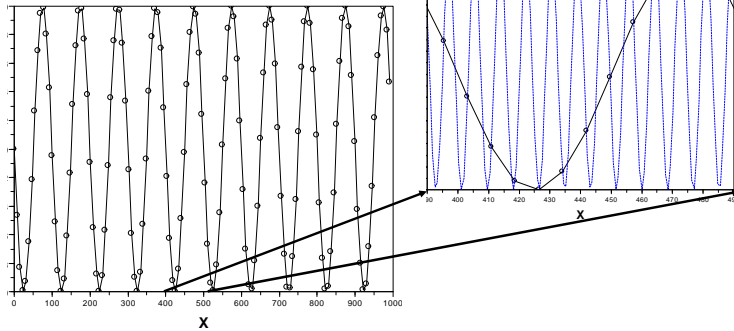
• Onde est donc perçue incorrectement comme étant plus longue

Exemple

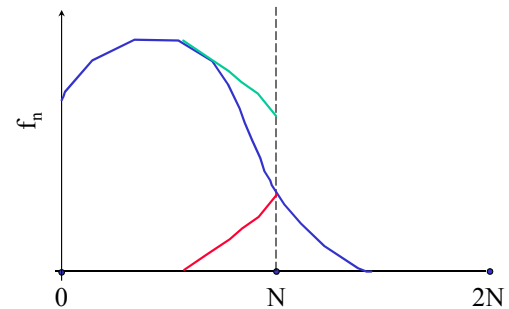
- $K = 129$, $N_0 = 64$, et $n = N_0 + 55 = 119$

$$F(x_k) = \sin\left(119 \frac{2\pi}{L_x} x_k\right)$$

Effet d'aliasing



Schématisation de l'aliasing



Implications pour la méthode spectrale

- **Produit $A(x)B(x)$ comprend des ondes ayant des composantes $0 < n < 2N$**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\sum_{n=-N}^{+N} U_n e^{in\frac{2\pi}{K}x} \right] \left[\sum_{m=-N}^{+N} in \frac{2\pi}{L} U_m e^{im\frac{2\pi}{K}x} \right] = \sum_{n=-2N}^{+2N} d_n e^{in\frac{2\pi}{K}x}$$

- **But:** utiliser suffisamment de points de grille pour que les coefficients soient exacts pour $0 \leq n \leq N$
- Choisir N_{max} tel que $2N = N_{max} + l$

$$N_{max} > 3N/2$$
- On choisit donc $K = 2N_{max} + l = 3N + l$.

Implications pour la méthode spectrale

- **Produit $A(x)B(x)$ comprend des ondes ayant des composantes $0 < n < 2N$**

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\sum_{n=-N}^{+N} U_n e^{in\frac{2\pi}{K}x} \right] \left[\sum_{m=-N}^{+N} im \frac{2\pi}{L} U_m e^{im\frac{2\pi}{K}x} \right] = \sum_{n=-2N}^{+2N} d_n e^{in\frac{2\pi}{K}x}$$

- **But:** utiliser suffisamment de points de grille pour que les coefficients soient exacts pour $0 \leq n \leq N$
- Choisir N_{max} tel que $2N = N_{max} + l$.
- Donc $l_{max} = 2N - N_{max}$.
- On choisit N_{max} de telle sorte qu'il n'y ait pas d'aliasing sur les ondes $0 \leq n \leq N$ ce qui nécessite que $N_{max} - l_{max} > N$
- Conséquent: $N_{max} - l_{max} = 2N_{max} - 2N > N$

$$N_{max} > 3N/2$$
- On choisit donc $K = 2N_{max} + l = 3N + l$.

Algorithme de la méthode pseudo-spectrale

- **Résoudre:** $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u = g(x)$
- **Conditions initiales:** $u(x,0) = \sum_{n=-N}^{+N} U_n(0) e^{in(2\pi/L)x}$
- **Forçage:** $g(x) = \sum_{n=-N}^{+N} G_n e^{in(2\pi/L)x}$
- **Schéma saute-mouton:** $U_n(t + \Delta t) = U_n(t - \Delta t) - 2\alpha \Delta t U_n(t - \Delta t) - 2\Delta t D_n(t) + G_n$
- **Calcul de $D_n(t)$:** $D_n = FFT \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_{t=t}$
 - a. $u(x,t) = FFT^{-1}\{U_n\}$
 - b. $(\partial u / \partial x) = FFT^{-1}\{in(2\pi/L)U_n\}$
 - c. Multiplication point par point
 $G(x_k) = G_k = u_k (\partial u / \partial x)_k$
 - d. $D_n = FFT\{G_k\}$ pour $n = 0, \dots, N$
- **Calcul est exact à la condition que $K = 3N + 1$**