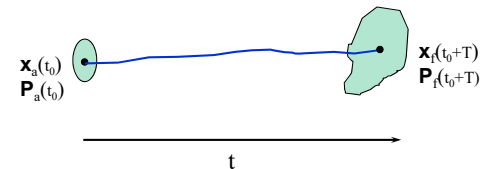


Le filtre de Kalman et le filtre de Kalman étendu

Application à la mesure de l'impact d'observations dans le cadre d'une Expérience avec un Réseau d'observations simulées
(ou *Observing system simulation Experiment, OSSE*)

Filtre de Kalman

- Améliorations à la modélisation des covariances d'erreur de prévision



- Croissance d'erreur dépend de la dynamique qui gouverne l'évolution de la prévision
- But: obtenir une équation d'évolution pour les covariances d'erreur de prévision

Evolution des covariances d'erreur de prévision

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(t) &= (\mathbf{x}_b(t) - \mathbf{x}_t(t)) & : & \text{erreur de prévision} \\ \varepsilon_o(t) &= (\mathbf{y}^o(t) - \mathbf{H}\mathbf{x}_t(t)) & : & \text{erreur d'observation} \\ \varepsilon_a(t) &= (\mathbf{x}_a(t) - \mathbf{x}_t(t)) & : & \text{erreur d'analyse} \end{aligned}$$

- **Equation d'évolution**

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = L\varepsilon$$

- A $t = t_0$, $\varepsilon(t_0) = \varepsilon^a(t_0)$. Pour une équation différentielle *linéaire*, la solution au temps t peut être reliée aux conditions initiales par un **propagateur** $R(t, t_0)$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t_n}^b &= R(t_n, t_0)\varepsilon_{t_0}^a \equiv R(t_n, t_0)\varepsilon_{t_0}^a \\ \varepsilon_{t_{n+1}}^b &= R(t_{n+1}, t_n)\varepsilon_{t_n}^a \end{aligned}$$

Exemple

- **Cas linéaire** $\frac{d\varepsilon}{dt} = i\omega\varepsilon - \alpha\varepsilon$

$$\varepsilon(t) = \left[e^{i\omega(t-t_0)} e^{-\alpha(t-t_0)} \right] \varepsilon_0$$

$$= R(t, t_0)\varepsilon_0$$

Propriété:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \varepsilon_0 + \delta_0 \\ \gamma(t) &= R(t, t_0)[\varepsilon_0 + \delta_0] = R(t, t_0)\varepsilon_0 + R(t, t_0)\delta_0 \\ &= \varepsilon(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

- **Cas non-linéaire**

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon^2 \\ \varepsilon(t) &= \alpha\varepsilon_0 \frac{e^{\alpha(t-t_0)}}{\left[\beta\varepsilon_0 + \alpha - \beta\varepsilon_0 e^{\alpha(t-t_0)} \right]} \end{aligned}$$

* Relation non-linéaire entre les conditions initiales et la solution au temps t

Forme numérique du propagateur

- Intégration numérique sur un pas de temps de t_n à $t_n + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= Q_n \varepsilon_n \\ &= Q_n Q_{n-1} \varepsilon_{n-1} = Q_n Q_{n-1} \cdots Q_0 \varepsilon_0 \end{aligned}$$

où

$$R_n = Q_n Q_{n-1} \cdots Q_0$$

- Equation d'évolution des covariance d'erreur de prévision

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \langle \varepsilon^a(t) \varepsilon^b(t)^T \rangle \\ \mathbf{B}_{n+1} &= \langle \varepsilon_{n+1}^a \varepsilon_{n+1}^b{}^T \rangle = \langle (R_n \varepsilon_0^a) (R_n \varepsilon_0^b)^T \rangle = \langle (R_n \varepsilon^a) (R_n \varepsilon^b)^T \rangle \\ &= R_n \langle \varepsilon^a \varepsilon^b{}^T \rangle R_n^T = R_n \mathbf{P}_a^0 R_n^T \end{aligned}$$

Opération nécessite 2N intégrations de modèle

- $R_n \mathbf{P}_a^{(n)} = R_n (\mathbf{p}^{(1)} \quad \mathbf{p}^{(2)} \quad \cdots \quad \mathbf{p}^{(n)}) = \mathbf{M}$
- $\mathbf{B}^T = \mathbf{B} = R_n \mathbf{M}^T$

Phase d'analyse du filtre de Kalman

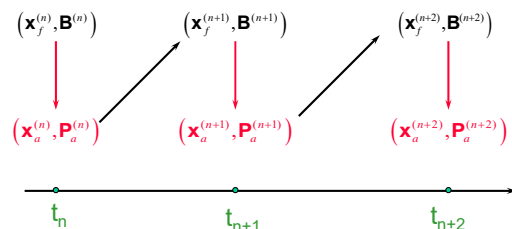
- Identique à ce que l'on a déjà obtenu comme estimateur minimisant la variance d'erreur d'analyse

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a^{(n)} &= \mathbf{x}_b^{(n)} + \mathbf{K}_n (\mathbf{y}^{(n)} - \mathbf{H}_n \mathbf{x}_b^{(n)}) \\ \mathbf{K}^{(n)} &= \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)T} (\mathbf{R}^{(n)} + \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)T})^{-1} \\ \mathbf{P}_a^{(n)} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)}) \mathbf{B}^{(n)} \\ \mathbf{x}_f^{(n+1)} &= R(t_n, t_{n+1}) \mathbf{x}_a^{(n)} \end{aligned}$$

- Evolution des covariances d'erreur de prévision

$$\mathbf{B}^{(n+1)} = R(t_n, t_{n+1}) \mathbf{P}_a^{(n)} R^{(n)T}$$

Schématisation du cycle du filtre de Kalman



- Temps réfère ici aux temps où des observations sont assimilées (intervalle de 6-h ou 1-h typiquement)
- Processus est séquentiel: assimilation est faite en progressant dans le temps sans jamais revenir en arrière

Divergence du filtre de Kalman

- Filtre de Kalman

- * historiquement, il a été introduit pour des modèles linéaires simples qui étaient légèrement amortis
- * Intégration des covariances d'erreur de prévision dans la limite où $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{B}| = 0$$

- Variance d'erreur d'analyse est toujours inférieure à celle de B

- Matrice de gain $\mathbf{K} \rightarrow 0$ également

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{B}_n \mathbf{H}_n^T (\mathbf{R}_n + \mathbf{H}_n \mathbf{B}_n \mathbf{H}_n^T)^{-1}$$

Divergence du filtre de Kalman

Observations sont alors dans l'impossibilité de corriger la prévision!!

Erreur de modèle

- Terme de forçage aléatoire est introduit dans l'équation d'évolution des covariances d'erreur de prévision

$$\mathcal{E}_b^{(n+1)} = R(t_n, t_{n+1}) \mathcal{E}_a^{(n)} + \mathcal{E}_M$$

$$\mathbf{B}^{(n+1)} = R(t_n, t_{n+1}) \mathbf{P}_a^{(n)} R(t_n, t_{n+1})^T + R(t_n, t_{n+1}) \langle \mathcal{E}_a^{(n)} \mathcal{E}_M^T \rangle + \langle \mathcal{E}_M \mathcal{E}_a^{(n)T} \rangle R(t_n, t_{n+1})^T + \langle \mathcal{E}_M \mathcal{E}_M^T \rangle$$

- Erreur de modèle \mathcal{E}_M est supposée aléatoire et non-corrélée avec l'erreur d'analyse

$$\langle \mathcal{E}_M \rangle = 0 \quad \mathbf{Q}_n = \langle \mathcal{E}_M \mathcal{E}_M^T \rangle \quad \langle \mathcal{E}_a^{(n)} \mathcal{E}_M^T \rangle = 0$$

- Equation d'évolution avec erreur de modèle:

$$\mathbf{B}^{(n+1)} = R(t_n, t_{n+1}) \mathbf{P}_a^{(n)} R(t_n, t_{n+1})^T + \mathbf{Q}_n$$

- En absence d'observations: $|\mathbf{B}| \rightarrow \mathbf{Q}$ (cas stationnaire)

Extension au cas nonlinéaire: le filtre de Kalman étendu

- **Modèle nonlinéaire:**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = F(\mathbf{x})$$

- **Equation linéaire décrivant l'évolution de l'erreur de prévision: le modèle linéaire tangent**

* Intégration $\mathbf{x}_b(t)$ de t_n à t_{n+1} à partir de conditions initiales $\mathbf{x}_a(t_n)$

* Erreur de prévision: obtenue en soustrayant deux intégrations de modèle.

$$\mathcal{E}_b(t) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t^{(n)} + \mathcal{E}_a^{(n)}, t) - \mathcal{N}(\mathbf{x}_t^{(n)}, t) + \mathcal{E}_M$$

* Equation d'évolution pour l'erreur:

$$\frac{d\mathbf{x}_R}{dt} = F(\mathbf{x}_R)$$

$$\frac{d(\mathbf{x}_R + \delta\mathbf{x})}{dt} = F(\mathbf{x}_R + \delta\mathbf{x}) \cong F(\mathbf{x}_R) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_R(t)) \delta\mathbf{x}$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_R(t)) \delta\mathbf{x}$$

Exemple:

- **Approximation linéaire tangente:**

$$\frac{dx_R}{dt} = \alpha x_R + \beta x_R^2$$

$$\frac{d\delta x}{dt} = \alpha \delta x + 2\beta x_R(t) \delta x + \beta \delta x^2$$

$$\frac{d\delta x}{dt} \cong \alpha \delta x + 2\beta x_R(t) \delta x$$

- Modèle linéaire tangent est un modèle dont les coefficients dépendent d'un état de base qui varie dans le temps et l'espace, appelé la *trajectoire de référence*

- Il existe un propagateur associé à la solution obtenue de tout système linéaire

$$\delta\mathbf{x}(t) = R(t, t_0) \delta\mathbf{x}_0$$

- Termes nonlinéaires n'impliquant que la perturbation sont négligés

Expression numérique du propagateur

- **Action du modèle linéarisé:**

$$\delta\mathbf{x}(t_n) = \mathcal{Q}_n(\mathbf{x}_R(t_n)) \mathcal{Q}_{n-1}(\mathbf{x}_R(t_{n-1})) \cdots \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}_R(t_0)) \delta\mathbf{x}_0 \equiv L_n \delta\mathbf{x}_0$$

- **Paramètres définissant le modèle linéaire tangent en fonction d'une trajectoire de référence obtenue d'une intégration du modèle nonlinéaire.**

- **Filtre de Kalman étendu: identique au filtre de Kalman sauf que**

* l'intégration de la prévision est faite avec le modèle nonlinéaire

* l'évolution des covariances d'erreur de prévision est faite avec le modèle linéaire tangent.

* réf.: Ghil (1989), Gauthier *et al.*, 1993 (*Mon. Wea. Rev.*, p.1803-1820)

Equations du filtre de Kalman étendu

$$\mathbf{x}_a^{(n)} = \mathbf{x}_f^{(n)} + \mathbf{K}^{(n)} (\mathbf{y}^{(n)} - \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x}_b^{(n)})$$

$$\mathbf{K}^{(n)} = \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)T} (\mathbf{R}^{(n)} + \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)T})^{-1}$$

$$\mathbf{P}_a^{(n)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(n)} \mathbf{H}^{(n)}) \mathbf{B}^{(n)}$$

$$\mathbf{x}_f^{(n+1)} = F(\mathbf{x}_a^{(n)})$$

$$\mathbf{B}^{(n+1)} = R(t_n, t_{n+1}) \mathbf{P}_a^{(n)} R(t_n, t_{n+1})^T + \mathbf{Q}$$

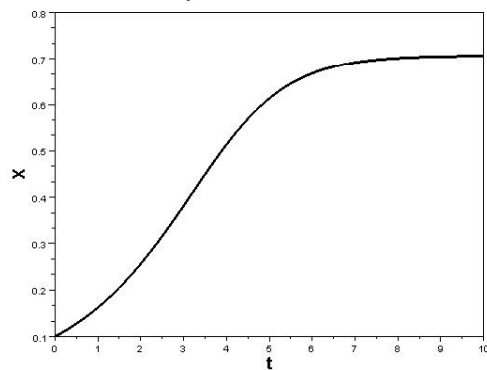
Remarque sur le filtre de Kalman étendu

- Croissance exponentielle d'erreur peut dépasser les niveaux de saturation produits par le modèle nonlinéaire
- Exemple: équation de Landau associé à l'équilibrage nonlinéaire d'une onde instable.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^3$$

- Bouttier (1993): ajout d'un terme de saturation pour limiter la croissance au niveau de la variabilité climatologique.
- Problème de fermeture s'applique tout comme pour les équations de la turbulence

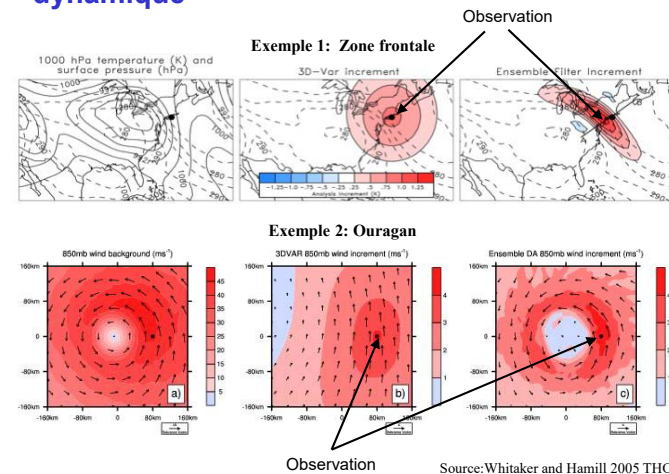
Equation de Landau



$$\alpha = 0.5$$

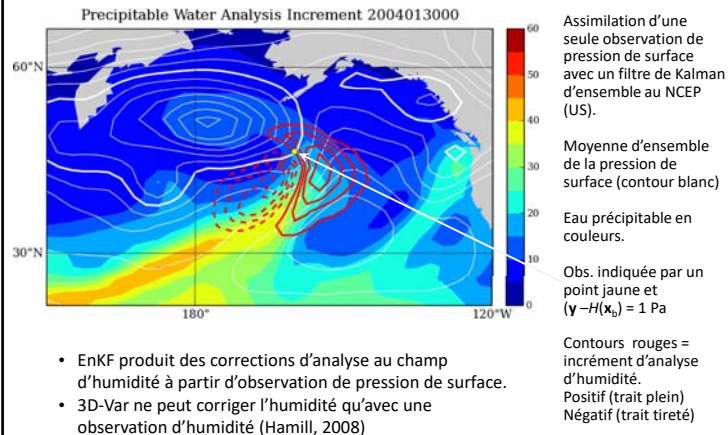
$$\beta = 1$$

Exemples de covariance d'erreur statique et dynamique



Source: Whitaker and Hamill 2005 THORPEX

Exemple de covariances d'erreur dépendantes de l'écoulement (obtenues d'un filtre de Kalman d'ensemble)



Formes approximées du filtre de Kalman

• **Le filtre de Kalman d'ensemble**

- * Génération d'un échantillon de perturbations des conditions initiales cohérente avec notre connaissance de l'erreur d'analyse
- * Intégration du modèle complet à partir des conditions initiales

$$\mathbf{X}_a^{(i)} = \mathbf{X}_a + \delta\mathbf{x}_a^{(i)}$$

$$\langle \delta\mathbf{x}_a^{(i)} (\delta\mathbf{x}_a^{(j)})^T \rangle \approx \mathbf{P}_a$$

• **Estimation de B(t) à partir de l'ensemble de prévisions ainsi générées**

$$\delta\mathbf{x}_f^{(i)}(t_F) = \mathbf{N}(\mathbf{X}_a^{(i)}) - \mathbf{N}(\mathbf{X}_a)$$

$$\mathbf{B}(t_F) \cong \langle (\delta\mathbf{x}_f^{(i)})(\delta\mathbf{x}_f^{(j)})^T \rangle = \frac{1}{(K-1)} \sum_{i=1}^K (\delta\mathbf{x}_f^{(i)})(\delta\mathbf{x}_f^{(i)})^T$$

Limitations

• **Taille de l'ensemble**

- * L'incrément d'analyse est forcément une combinaison linéaire des membres de l'ensemble
- * Echantillon de taille finie crée des corrélations aux grandes distances qui posent problème
- * Recours à des techniques comme la localisation pour *filtrer* les covariances

• **Prise en compte de l'erreur de modèle**

- * Ajoute une composante aléatoire à chaque prévision pour représenter l'erreur de modèle
- * Arbitraire dans la définition de l'erreur (difficultés à estimer l'erreur de modèle)

Impact de la taille de l'ensemble sur l'estimation de B

• **Considère un ensemble généré à partir de**

$$\mathbf{B}(x_1, x_2) = \sigma_b^2 \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2L^2}\right) = (\mathbf{B}^{1/2} \mathbf{B}^{1/2T}) = (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1/2})(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1/2})^T$$

- Si $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{x})$ est un vecteur dont les composantes sont statistiquement indépendantes, de moyenne nulle et d'écart-type égal à 1, alors

$$\mathbf{B}_\varepsilon = \langle \varepsilon^{(k)} \varepsilon^{(k)T} \rangle = \mathbf{I}$$

- Ainsi si $\delta\mathbf{e}^{(k)}(\mathbf{x}) = (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1/2})\varepsilon^{(k)}(\mathbf{x})$, alors

$$\mathbf{B}_{est.} = \langle \delta\mathbf{e}^{(k)} (\delta\mathbf{e}^{(k)})^T \rangle = \langle (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1/2})\varepsilon^{(k)}\varepsilon^{(k)T}(\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}) \rangle$$

$$= (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{1/2}) \langle \varepsilon^{(k)}\varepsilon^{(k)T} \rangle (\mathbf{\Lambda}^{1/2T}\mathbf{V}^T) = \mathbf{B}$$

Estimation à partir d'un ensemble de perturbations

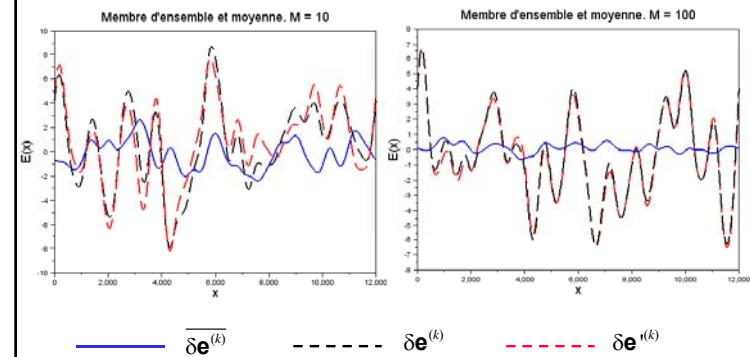
- Pour estimer B, on génère M perturbations telles que décrites plus haut et

$$\mathbf{B}_{est.} = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M \delta \mathbf{e}^{(k)} (\delta \mathbf{e}^{(k)})^T \cong \mathbf{B}$$

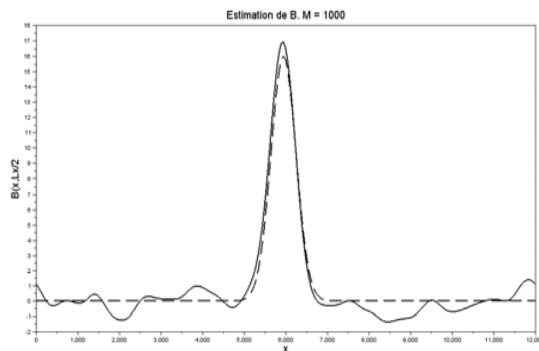
Remarque. Les perturbations doivent être débiaisées au préalable, i.e.

$$\delta \mathbf{e}^{(k)} = \delta \mathbf{e}^{(k)} - \overline{\delta \mathbf{e}^{(k)}} \quad \text{avec} \quad \overline{\delta \mathbf{e}^{(k)}} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \delta \mathbf{e}^{(k)}$$

Impact du débiaisage



Estimation de B avec des ensembles



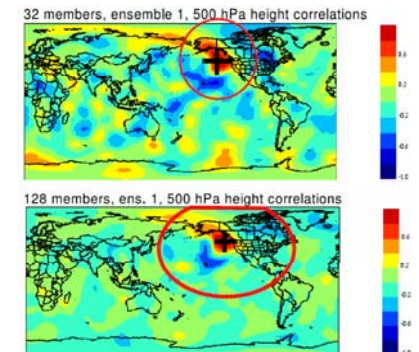
Difficultés liées à la taille de l'ensemble

$$\delta \mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i)} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_k^{(i)}$$

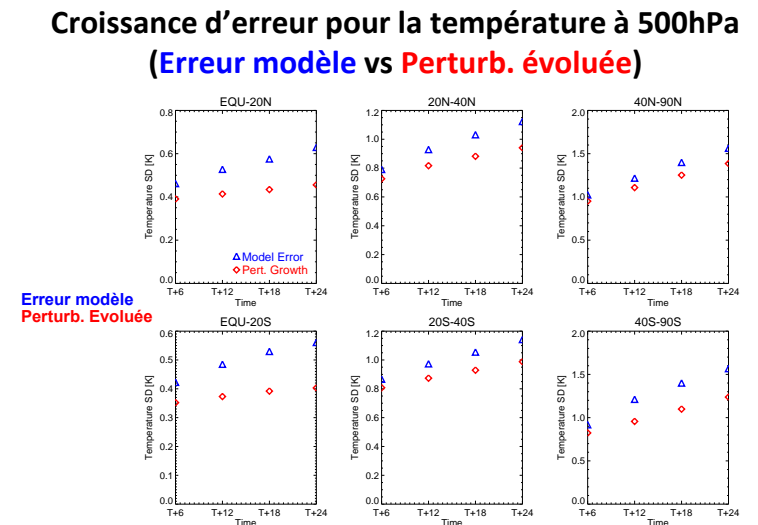
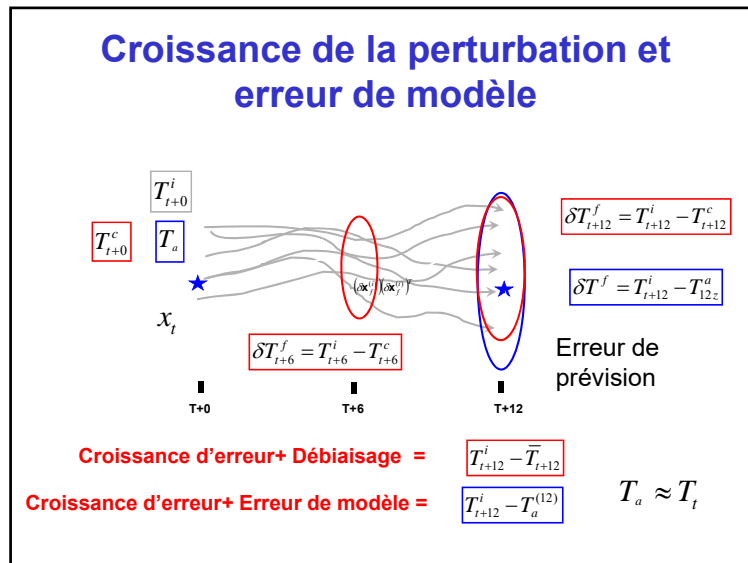
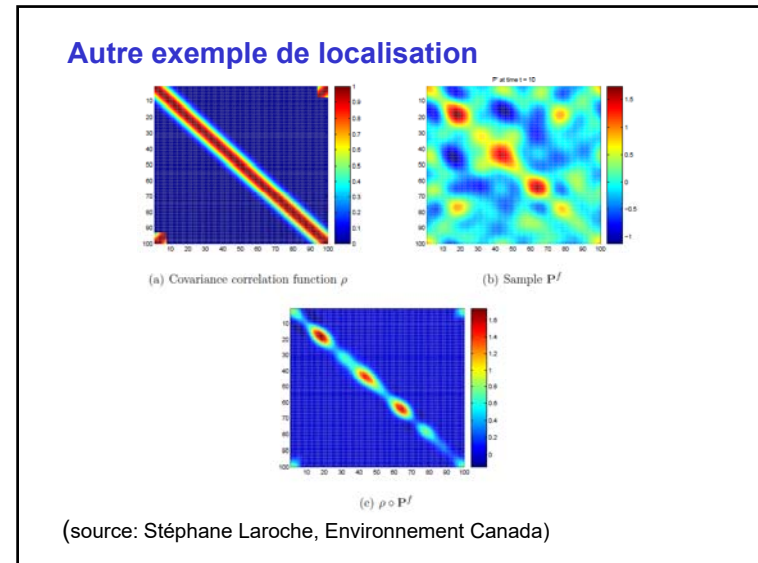
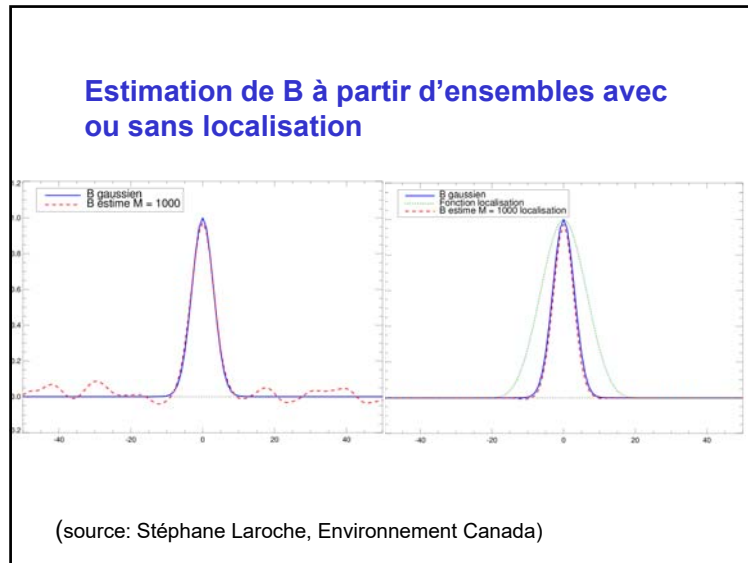
$$\mathbf{P}_k^f = \left\langle (\boldsymbol{\varepsilon}_k^f) (\boldsymbol{\varepsilon}_k^f)^T \right\rangle$$

$$\approx \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \delta \mathbf{x}_k^{(i)} (\delta \mathbf{x}_k^{(i)})^T$$

- Lorsque le nombre de membres M est restreint, des corrélations d'erreur éloignées et fictives apparaissent.
- Impact non-négligeable sur la qualité de l'analyse.



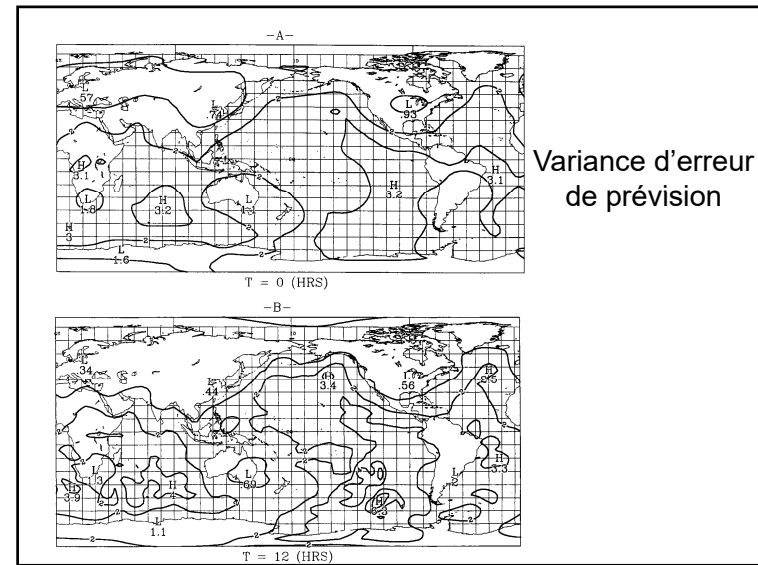
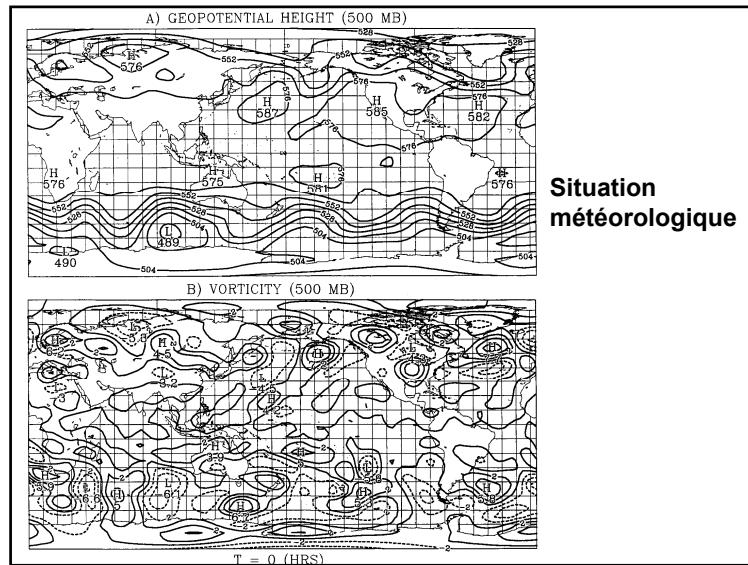
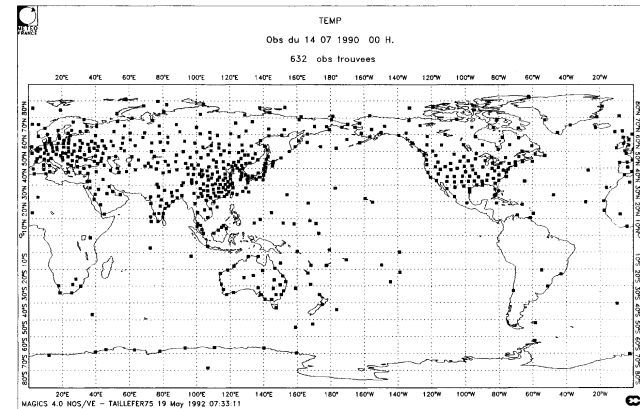
(source: Stéphane Laroche, Environnement Canada)



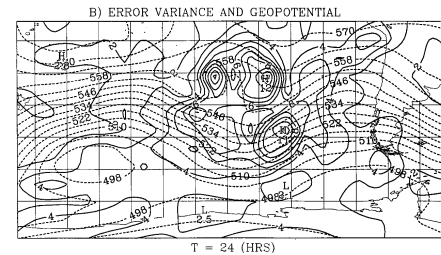
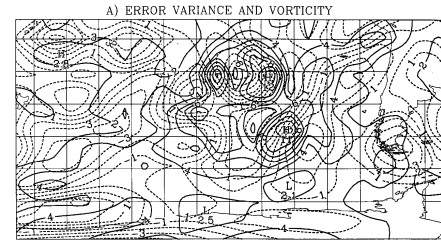
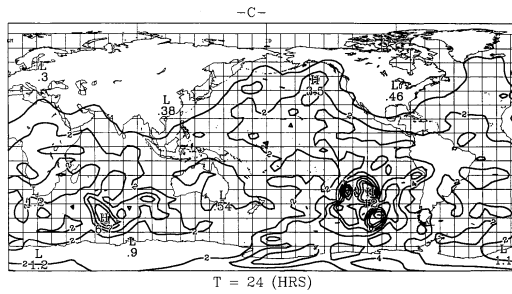
Assimilation de mesures de vent radial avec un Lidar embarqué sur satellite

- Etude faite pour l'Agence Spatiale Européenne (Gauthier *et al.*, 1993)
- Filtre de Kalman étendu basé sur un modèle global barotrope sur la sphère (troncature triangulaire T21, grille 64x32)
- Mesure de l'impact de nouvelles observations synthétiques en examinant la réduction de variance d'erreur de prévision

Réseau de radiosondages (TEMP)



Variance d'erreur de prévision après 24-h



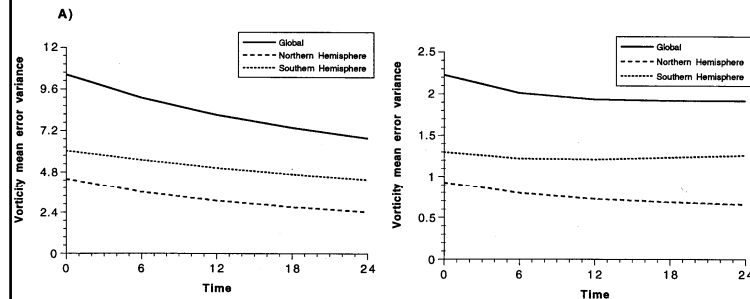
Champs de variance
d'erreur après 24-h
d'intégration du filtre de
Kalman étendu
a) Variance et tourbillon
relatif
b) Variance et
géopotentiel

Instabilité barotrope
associée à la présence
d'un fort gradient dans
le champ de tourbillon
explique la croissance
de l'erreur

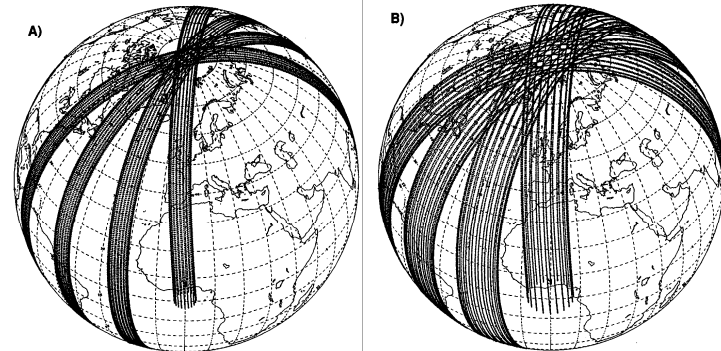
Evolution du champ de variance d'erreur
Réseau de radiosondages

$L_c = 400$ km

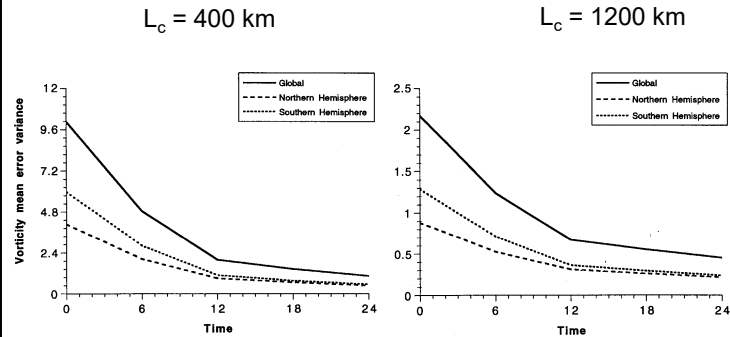
$L_c = 1200$ km



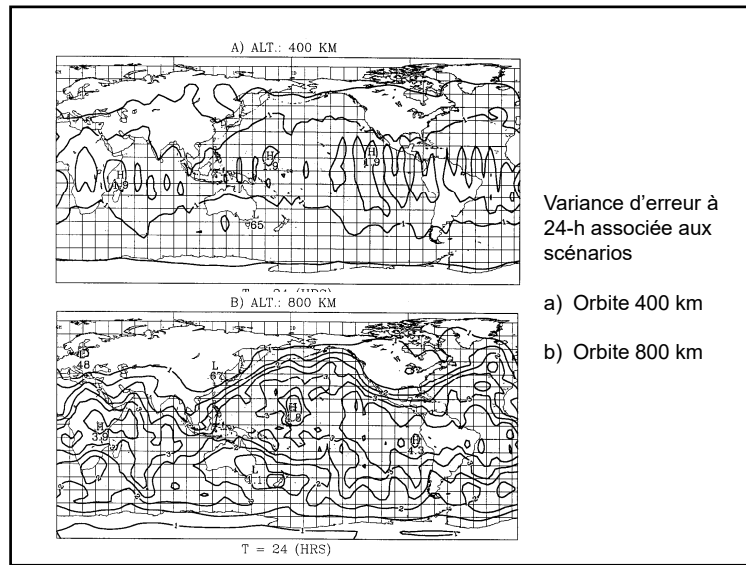
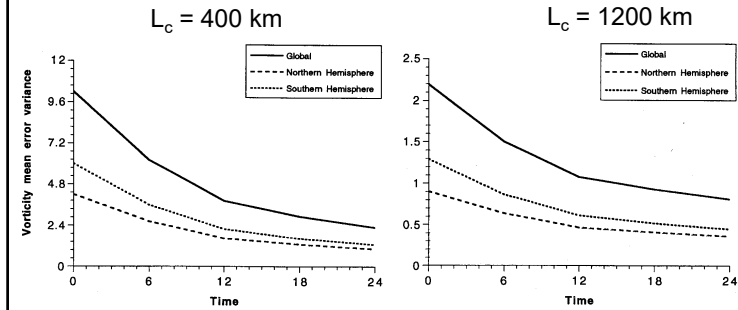
Distribution associée à une orbite d'altitude
a) 400 km et b) 800 km



Evolution de la variance totale d'erreur de prévision
Altitude: 400 km



Evolution de la variance totale d'erreur de prévision
(Altitude: 800 km)



Conclusions

- **Filtre de Kalman permet d'estimer les covariances d'erreur d'analyse et de prévision**
 - * Meilleure prise en compte de la précision de l'ébauche utilisée par l'assimilation
 - * Divergence du filtre de Kalman lorsque la dynamique est dissipative et $|B| \rightarrow 0$
 - * Ajout d'une erreur de modèle pour éviter le problème de divergence
- **Non linéarités sont partiellement prises en compte par le filtre de Kalman étendu**
 - * Croissance exponentielle de l'erreur causée par les instabilités atmosphériques
- **Coût du filtre de Kalman le rend inapplicable pour des systèmes d'assimilation « opérationnels »**
 - * Filtre de Kalman d'ensemble estime B à l'aide d'un nombre fini de perturbations
 - * Mise en œuvre peut être considérée pour des centres opérationnels